4-2-5

David Hilbert y su Filosofía Empiricista de la Geometría

Leo Corry

David Hilbert (1862-1943) fue sin duda uno de los matemáticos más influyentes de principios del siglo veinte. Su obra se extendió sobre numerosos y diversos campos de investigación abarcando desde la teoría de los invariantes algebraicos, hasta las ecuaciones integrales, pasando por los fundamentos de la geometría, de la física y de la lógica. Junto con Henri Poincaré (1854-1912), Hilbert ha sido reconocido como el último gran universalista de las matemáticas.

A partir de 1918 el principal campo de investigación de Hilbert fue el de los fundamentos de la aritmética, campo que cultivó junto con sus últimos grandes colaboradores, Paul Bernays (1888-1977) y Wilhelm Ackermann (1896-1962). Como parte de esta actividad, Hilbert se vio envuelto en una serie de vívidas discusiones con importantes matemáticos que representaban visiones opuestas a la suya. Estas discusiones llegaron a conocerse en la historia de la disciplina como "la crisis de fundamentos, y los principales puntos de vista expuestos en ella se denominaron intuicionismo, logicismo y formalismo.[1] Hilbert fue el más prominente matemático entre aquellos que defendieron el punto de vista formalista.

La posición intuicionista fue propugnada inicialmente por el holandés Luitzen Egbertus Brouwer (1881-1966). Brouwer había realizado una destacada labor de investigación como topólogo, pero su verdadero interés se concentraba, desde muy temprano en su carrera, en la pregunta de los fundamentos de la matemática. Siguiendo una línea de pensamiento originada por el matemático berlinés Leopold Kronecker (1823-1891), Brouwer sostenía una filosofía de las matemáticas que se oponía al uso del infinito actual, y en particular al uso indiscriminado de la gran gama de cardinales infinitos recientemente dados a conocer por la teoría de los conjuntos desarrollada a fines del siglo diecinueve por Georg Cantor (1845-1918) y Richard Dedekind (1831-1916).[2] Matemáticos como Kronecker y Brouwer consideraban que el único tipo de infinito que podría

[1] Mancosu 1998.

[2] El inicio de la teoría de los conjuntos es a menudo atribuido exclusivamente a la labor de Cantor (y yo mismo usaré el término "cantoriano", en este artículo), pero recientes estudios históricos determinan claramente el papel clave jugado por Dedekind en el desarrollo de la teoría. Véase sobre todo, Ferreirós 1999.

utilizarse validamente en matemáticas era el infinito potencial, es decir aquel implicado por el hecho de que la serie de los números naturales podría seguirse extendiendo indefinidamente desde cualquier número dado. Las paradojas recientemente descubiertas en el contexto de la teoría de conjuntos ofrecían evidencia adicional, y, en opinión de Brouwer, tajante, de los peligros sobre los cuales él quería prevenir. En su opinión, en matemáticas deberían aceptarse tan sólo argumentos constructivos para los cuales se conoce un "procedimiento efectivo" y nunca demostraciones de existencia basadas en argumentos de reducción al absurdo que implican la adopción irrestricta, explícita o implícita, de los cardinales infinitos cantorianos.

Hilbert por su parte había sido desde muy temprano en su carrera uno de los grandes defensores de la teoría cantoriana, en la cual veía uno de los grandes logros de la disciplina y uno de los medios clave para asegurar su continuado desarrollo exitoso en las décadas por venir. Esta visión la expresó en diversas oportunidades, siendo especialmente famosa su declaración de 1926, al efecto de que "nadie nos sacará del paraíso que Cantor creó para nosotros."[3] Pero más importante que las declaraciones es el hecho que el primer logro investigativo de real importancia en su carrera se había debido a una demostración de existencia precisamente del tipo al que Brouwer llegó a oponerse. Era ésta la demostración de existencia de una base finita para cualquier sistema dado de invariantes de orden arbitrario. Este había sido un problema que ocupó por largos años los mejores esfuerzos de los practicantes de la disciplina, desde que Paul Gordan (1837-1912) había probado en 1868 su validez para el caso específico de los sistemas binarios. La demostración de Hilbert se basaba en un argumento por reducción al absurdo, y en su primer momento una prueba de existencias de este tipo no fue aceptada con facilidad por sus contemporáneos. Gordan mismo, a quien Felix Klein (1849-1925) pidió que juzgue el artículo para su publicación en *Mathematische Annalen*, lo rechazó en un principio, declarando: "Esto no es matemática, esto es teología."[4]

El debate de los fundamentos de los años veinte tocaba un punto importantísimo en las concepciones de Hilbert, pero la ferocidad que tomó en algunos momentos se debió no sólo a razones puramente científicas, sino también a cuestiones de prestigio personal. Así, el debate se tornó especialmente agudo desde el momento en que Hermann Weyl (1885-1995), el más prominente de entre los muchísimos alumnos brillantes de Hilbert, cruzó las líneas para unirse al enemigo. En 1921 Weyl publicó un panfleto en el cual explicaba y apoyaba las ideas de Brouwer, y a la vez criticaba en términos muy afilados las posiciones generalmente aceptadas en lo referente a los fundamentos de la matemática, basándose en el uso de la teoría de los conjuntos. Para Weyl, la posición de Brouwer constituía una verdadera revolución que podría solucionar la penosa

[3]Hilbert 1926, 375-376.
[4]Corry 1996, Capítulo 3.

situación en que la disciplina se encontraba, en su opinión. Entre las reacciones más contundentes de Hilbert al intuicionismo se encuentran aquellas que surgieron como respuesta directa al panfleto de Weyl.[5]

Pero Hilbert entendía que la posición de Brouwer y Weyl no era totalmente infundada y que era necesario, efectivamente, tomar precauciones que eviten el caer en las paradojas de la teoría de conjuntos. Por otro lado, él no estaba dispuesto a renunciar a los logros obtenidos en matemática gracias al extendido uso de la última. La posición formalista que Hilbert y sus colaboradores desarrollaron proponía una vía intermedia como solución, basada en una axiomatización conjunta de la matemática y de la lógica.

El punto de partida era la posibilidad indiscutida de formalizar, basándose en un número finito de axiomas, los conceptos y las demostraciones de la aritmética, como se conocía desde los trabajos de Peano y de Russell y Whitehead. En estas condiciones, el concepto mismo de "demostración" podría volverse un objeto de estudio matemático, y por medio de ello Hilbert esperaba probar la consistencia de la aritmética. El punto clave de este programa es que la prueba de consistencia se obtendría por medios "finitistas", que los intuicioncitas mismos aceptarían como válidos.

Hilbert y Bernays introdujeron la idea de abordar este problema por medio de dos niveles de consideración: primero, un nivel de discurso matemático cuyos teoremas son demostrables por métodos constructivos que no requieren la intervención de argumentos con infinitos cantorianos. El segundo nivel es el que se obtiene al adherir a aquel, una serie de elementos "ideales", tal y como en la geometría proyectiva se agregan puntos, líneas y planos ideales en el infinito, o como en la teoría de los números Kummer agregó números ideales para probar sus teoremas de factorización única. Así como en estas disciplinas no es relevante preguntarse por el significado de la existencia de estos elementos ideales, sino que con su ayuda se prueban teoremas, así mismo proponía Hilbert considerar sus elementos ideales en la aritmética.

Usando tan sólo los métodos finitistas aceptados e incuestionables, se demostraría que aún al extender el sistema para que incluya los elementos ideales, no se perdía la consistencia ni se introducían contradicciones. Con este fin, *y tan sólo con este fin*, Hilbert propuso ver la aritmética de los elementos ideales como un sistema de signos faltos de significado sobre los cuales puede operarse por medio de reglas estipuladas con anticipación, reglas que deben verse como puramente formales y como faltas de significado intrínseco. El intento de probar la consistencia de la aritmética de esta manera, y basándose tan sólo en procedimientos finitistas, fue lo que llegó a conocerse como el programa formalista de Hilbert. Como bien es sabido, a pesar del optimismo que acompañó a este programa desde su principio, él llegó a un callejón sin salida al publicar Kurt Gödel sus teoremas de incompletitud en 1931.

[5]Van Dalen 1990.

Hilbert fue entonces un formalista en su filosofía de la matemática en un sentido netamente circunscrito al problema particular del campo de los fundamentos de la matemática. Él concibió un programa detallado e inició, junto con sus colaboradores, la implementación de los pasos necesarios para abordarlo en la dirección que él consideraba potencialmente exitosa. Con buena razón, varios autores han preferido llamar al programa de Hilbert "finitista" antes que "formalista".[6]

Y es que el término "formalismo" también ha sido aplicado en la matemática del siglo veinte con un significado bastante diferente y en un contexto totalmente distinto. Este término también se ha aplicado parra denotar la idea según la cual la *matemática toda* no es sino una colección de sistemas deductivos estrictamente abstractos y formales, cuyo objetivo es derivar teoremas a partir de axiomas arbitrariamente escogidos y faltos de todo significado intrínseco. La única condición que se demandaría de tales sistemas, según este segundo tipo de formalismo, es la consistencia. Como posición filosófica, este enfoque se ha presentado como una alternativa al platonismo, o realismo matemático, o sea, la posición según la cual la matemática trata de las propiedades de algunos objetos dotados de existencia objetiva y exterior al matemático. Los objetos de que se ocupa la matemática son, según el enfoque platonista, similares en un sentido a los de la esfera de la experiencia empírica, ya que nuestro conocimiento de ellos es objetivo. Son diferentes, no obstante, ya que aquellos son eternos e incambiantes, y podemos conocerlos con mayor exactitud que a éstos.

Frecuentemente se ha dicho que la posición realista-platonista es la que mejor caracteriza la actitud del matemático investigador hacia la esencia de su disciplina. Así como el biólogo dedica su tiempo y energías en el laboratorio a estudiar objetivamente el comportamiento de, digamos, ciertas colonias de bacterias, asimismo el matemático dedica los suyos a estudiar el comportamiento de ciertos entes, los objetos matemáticos, que son externos a él. Claro que la analogía es un poco problemática, ya que el matemático que la siga tendrá bastante dificultad en contestar algunas preguntas simples, tales como dónde se encuentran esos objetos eternos e incambiables, y por medio de qué facultades puede él conocerlos. Aquí puede venir entonces el enfoque formalista (en el segundo sentido de la palabra) en su ayuda, tal y como lo han expresado claramente algunos matemáticos, por ejemplo en el siguiente conocido párrafo:

> En cuestiones fundacionales, nosotros creemos en la realidad de las matemáticas, pero claro, cuando los filósofos empiezan a atacarnos con sus paradojas, corremos a escondernos detrás del formalismo y decimos: "La matemática no es más que una combinación de símbolos faltos de significado" ... Finalmente se nos deja en paz y así podemos regresar a nuestra matemática, trabajando como siempre lo hemos hecho, es decir, con algo que es real.

[6] Mancosu 1998, 149-188.

(Dieudonné 1970, 145)

Esta posición dual, que difícilmente contentará a un filósofo de profesión, ha sido muy propiamente llamada "platonismo en días de asueto y formalismo en los fines de semana."[7] El formalismo aquí expresado tiene la ventaja de proveer una fácil vía de escape a las cuestiones que despierta el platonismo. Por otro lado tiene la gran desventaja de no poder explicar, entre otras cosas, la gran aplicabilidad de la matemática al estudio de la naturaleza. Tampoco explica otra pregunta básica: si la matemática en realidad trata de sistemas de axiomas faltos de significado y arbitrariamente escogidos (cuidando tan sólo de no caer en inconsistencia), ¿por qué algunos sistemas son realmente interesantes e importantes para la matemática mientras que otros son faltos de todo interés?

Entre aquellos que han promovido variantes de este tipo de posición formalista debe mencionarse con especial prominencia a un grupo de destacados matemáticos, primeramente franceses, conocidos bajo el pseudónimo de Bourbaki. Este grupo ejerció una tremenda influencia por varias décadas del siglo veinte en muchos ámbitos matemáticos internacionales, presentándose a sí mismos como los "verdaderos herederos [intelectuales] de Hilbert". Pues bien, la tremenda influencia de Bourbaki y la amplia aceptación de los puntos de vista formalistas en la matemática del siglo veinte, por un lado, y la existencia de la postura "formalista" (que sería más correcto llamar "finitista") de Hilbert en el debate fundacional de los años veinte con respecto a la pregunta de la consistencia de la aritmética, por otro lado, llegaron a combinarse de manera interesante para crear una imagen de Hilbert que los presenta como el gran formalista del siglo veinte en matemáticas, y no sólo en lo que respecta al debate fundacional, sino con respecto a la matemática toda.[8] Jean Dieudonné, quien tomó frecuentemente el uso de la palabra a nombre del grupo Bourbaki (y a quien también la cita anterior pertenece), describió en una oportunidad las concepciones de Hilbert, comparándolas con un juego de ajedrez. En ajedrez no tiene sentido hablar de verdad o falsedad. Lo que se habla es de seguir correctamente una serie de reglas estipuladas de antemano. Trasponiendo esta idea al contexto de la matemática, obtenemos la putativa concepción de Hilbert: la matemática se nos aparece como un juego, en el cual las piezas son signos gráficos que distinguen los unos de los otros tan sólo por su forma, y no por su contenido.[9]

En el presente artículo quisiéramos aclarar que si bien es cierto que Hilbert fue un formalista en el primer sentido, específico y circunscrito, que mencionamos arriba, de ninguna manera puede decirse que lo haya sido en su concepción general de la matemática, ni mucho menos en el sentido aquí descrito por Dieudonné. Antes de explicar este punto en mayor detalles, basta tal vez traer

[7] Tymoczko 1985, 11-21.
[8] Corry 1998.
[9] Dieudonné 1962, 551

una cita de Hilbert mismo, tomada de una serie de conferencias públicas dictadas en 1919-20 (es decir, en el punto más alto del famoso debate fundacional) y dedicadas a explicar a una audiencia general la esencia de la matemática como él la veía. Intentando refutar lo que en su opinión eran percepciones públicas erróneas de lo que es la matemática, él expresó este punto muy claramente (y contrariamente a lo dicho posteriormente por Dieudonné), en los siguientes términos:

> De ninguna manera se trata aquí de arbitrariedad. La matemática no tiene nada de parecido a un juego cuyas metas se establecen por medio de reglas arbitrariamente estipuladas. Se trata, más bien, de un sistema conceptual dotado de una necesidad interna que puede ser tan sólo así y no de alguna otra manera. (Hilbert 1992, 14)

El punto más interesante de la atribución errónea a Hilbert de una filosofía de la matemática formalista (en el sentido amplio de la palabra) se manifiesta en lo tocante a la geometría. En 1899 Hilbert publicó un famoso trabajo conocido como "*Los Fundamentos de la Geometría*", que contenía una novedosa y sistemática elaboración de la geometría euclídea y de las no-euclídeas. Hilbert expuso un nuevo enfoque del significado de los axiomas de esta disciplina, y de hecho de axiomas en cualquier disciplina matemática, que traería enormes implicaciones para la matemática del siglo que empezaba. Dada su adopción de la posición llamada formalista en el debate que se sostuvo veinte años después, ha sido común afirmar que la presentación de la geometría de Hilbert en 1900 refleja ya una actitud formalista total, tal y como se desarrollaría a lo largo del siglo veinte. Pero como veremos en las páginas siguientes, la concepción de Hilbert de la geometría mucho antes que formalista, era esencialmente empiricista.

"*Los Fundamentos de la Geometría*" de Hilbert apareció como la culminación de una vigorosa corriente de investigación que se desarrolló en el último tercio del siglo diecinueve, con la participación de matemáticos prominentes tales como Riemann, Beltrami, Helmholtz, Klein, Lie, Pasch, Veronese, y muchos otros. Esta corriente se originó en la gradual confluencia de dos afluyentes geométricos que surgieron e inicialmente se desarrollaron independientemente a lo largo del siglo: las geometrías no-euclídeas y la geometría proyectiva.

La geometría proyectiva se perfiló en el siglo diecinueve, siguiendo los trabajos de Jean Victor Poncelet (1788-1867) en 1822, como un campo muy activo, sobre todo en Alemania. Además de interesantes resultados y teoremas que se iban agregando continuamente, la atención se dirigía también hacia preguntas fundacionales de esta disciplina, especialmente en lo tocante al rol jugado por consideraciones de continuidad en la demostración de sus teoremas centrales. Una contribución fundamental en este campo provino de los intentos de Felix Klein (1849-1925) de explicar las interrelaciones entre los distintos tipos de geometrías recientemente desarrollados, en particular de demostrar que tanto la gomería euclídea como las no-euclídeas pueden verse como derivadas de la proyectiva. Un paso crucial en esta dirección lo constituyó la introducción de una métrica adaptable a cualquiera de los casos, sin basarse en conceptos derivados de la geometría euclídea tradicional.

El concepto de razón cruzada de cuatro puntos, que es un invariante proyectivo, le serviría a Klein como herramienta básica en su proyecto, si pudiera definirlo sin usar la distancia euclídea como tradicionalmente se había hecho. Klein usó ideas originalmente desarrolladas por Arthur Cayley (1821-1895) en su trabajo sobre invariantes cuadráticos,[10] y las extendió para incluir también el caso de la geometría no euclídea, que Cayley había dejado de lado intencionalmente, ya que rechazaba la posibilidad de tal tipo de geometrías. Basándose en estas ideas Klein explicó como definir la razón cruzada en términos puramente proyectivos, aunque en realidad no pudo completar satisfactoriamente todos los detalles técnicos necesarios. Sin embargo, quedaba clara la necesidad de basarse en un axioma de continuidad para implementar este punto de vista.[11]

Impulsados por los intentos de Klein, así como por las dificultades que éste había encontrado, y dada la importancia creciente de la investigación en el campo, varios matemáticos contemporáneos decidieron examinar con mayor cuidado, y clarificar en lo necesario, las estructuras deductivas del cuerpo de conocimiento existente en geometría proyectiva. El más importante, sistemático y completo, de entre los intentos realizados en esta dirección es el publicado en 1882 por Moritz Pasch (1843-1930): "Lecciones sobre la geometría nueva". En el se presentaba la disciplina de una manera novedosa, basada en un examen axiomático comprehensivo.[12]

Al reconstruir la geometría proyectiva en éstos nuevos términos, Pasch tomó especial cuidado en no referirse nunca a las propiedades de los diagramas relevantes, sino en seguir cuidadosamente las inferencias deductivas desde los axiomas. Esto le permitió cerrar algunas brechas lógicas que existían ya desde los tiempos de Euclides y que se fueron descubriendo gradualmente a lo largo de la historia. Pero es importante señalar que para Pasch, como para la mayoría de los geómetras alemanes desde el tiempo de Gauss, la geometría era una ciencia *natural*, cuyo objetivo es el estudio de la forma externa de los objetos, y cuyas verdades se obtienes, aunque deductivamente, a partir de axiomas que expresan hechos *directamente derivados de la experiencia empírica*. Para Pasch, el significado de los axiomas es netamente geométrico, nunca puramente formal, y su significado no puede comprenderse sin referencia a las figuras a las que se refieren. La *deducción* de los teoremas no debe ni puede apoyarse en los diagramas, pero el *significado* es estrictamente referente a ellos. Es por eso, por ejemplo, que Pasch criticó el uso del axioma de continuidad en la forma en que

[10] Véase Klein 1926-7 Vol. 1, 147-151.
[11] Klein 1871 & 1873; Rowe 1994, 194-195; Toepell 1986, 4-6; Torretti 1978, 110-152.
[12] Véase Torretti 1978, 44-53.

Klein lo hizo, ya que en su opinión, la experiencia empírica no daba suficiente evidencia para apoyarlo.[13]

Pero a pesar de que Pasch contribuyó substancialmente a clarificar la estructura deductiva de la geometría proyectiva, el estatus de las consideraciones de continuidad quedaba todavía sin elucidar definitivamente. Esto era particularmente el caso en lo referente a la posibilidad de definir un sistema de coordenadas para la geometría proyectiva sin usar la métrica de la geometría euclídea. No quedaba claro si la continuidad debería ser considerada como una propiedad fundamental del espacio como tal, o si ella podía reducirse a ideas más elementales.

Algunos matemáticos, como Klein y Wilhelm Killing (1847-1923), trataron de elaborar la primera de esta dos alternativas, mientras que otros, especialmente Hermann Ludwig Wiener (1857-1939) y Friedrich Schur (1856-1932) se avocaron a la segunda. Wiener expuso su punto de vista en una conferencia dictada en Halle en 1891 y a la cual Hilbert asistió. Wiener declaró que sería posible demostrar el así llamado "teorema fundamental de la geometría proyectiva" basándose tan sólo en los teoremas de Desargues y de Pappus. El teorema fundamental establece que para dos líneas rectas dadas cualesquiera, existe un único mapa proyectivo que relaciona cualquier trío de puntos de la primera a otros tres puntos cualesquiera de la segunda en un orden determinado. La prueba clásica de este resultado se basaba en la propiedad de invariancia proyectiva de la razón cruzada, la cual, a su vez, implica que la imagen de un cuarto punto escogido en la primera recta queda *únicamente determinado* por el mapa. Sin embargo, para establecer la *existencia* del cuarto punto en la segunda recta es necesario basarse en algún tipo de argumento de continuidad con respecto a las rectas.

La sugerencia de Wiener abría en apariencia la posibilidad de obviar este tipo de uso de la continuidad en el desarrollo de todo el cuerpo de conocimiento de la geometría proyectiva. Un poco más tarde, en 1898, Schur demostró efectivamente el teorema de Pappus sin usar axiomas de continuidad. Todas estas preguntas en torno al rol de la continuidad constituyeron el principal estímulo que llevó a Hilbert a involucrarse activamente en los fundamentos de la geometría.

Los trabajos de Pasch también tuvieron una influencia marcada sobre matemáticos italianos, y en primer lugar sobre Giuseppe Peano (1858-1930).[14] En 1889 Peano había desarrollado el lenguaje conceptual en el cual presentó sus postulados de la aritmética. El tratamiento axiomático de la geometría desarrollado por Pasch le ofrecían un interesante desafío, ya que Peano estaba interesado en elucidar la relación entre los términos lógicos, por un lado, y los puramente geométricos, por el otro, y para ello veía en su lenguaje una útil posibilidad

[13] Véase Contro 1976, 284-289; Torretti 1978, 210-218.

[14] Véase Kennedy 1980; Segre 1994.

de hacerlo. Esto lo llevó a introducir la idea de un sistema independiente de axiomas y a aplicarlo a su propio sistema que era una leve modificación del de Pasch. Este concepto de independencia es muy parecido al que posteriormente desarrollaría Hilbert, pero Peano lo usaba para axiomas individuales y nunca abordó el problema de probar la independencia de todo un sistema.[15] A pesar de su continua insistencia en ejecutar análisis detallados de las estructuras lógicas de teorías fundamentales en matemáticas, Peano, de manera similar a Pasch, no era un formalista ni un logicista en el sentido que posteriormente se le atribuyó a esos términos. Para Peano las ideas matemáticas, y en particular aquellas de la geometría, se derivan directamente de la experiencia empírica.[16]

Varios matemáticos italianos, influenciados por las ideas de Peano, publicaron trabajos que abordaban temas relacionados con los arriba mencionados. Entre los más interesantes se encuentran los de Mario Pieri (1860-1913),[17] quien tomó ya un rumbo diferente al promover la idea de la geometría vista como un sistema puramente hipotético-deductivo.[18] También debe mencionarse el trabajo de Giuseppe Veronese (1845-1917), quien en 1891 publicó el primer estudio sistemático de la posibilidad de una geometría no-arquimideana, es decir en la cual se omiten los axiomas de continuidad.[19] Esto lo hizo al probar la independencia entre el axioma de Arquímides y los restantes de la geometría.[20] Este es otro de los temas que Hilbert trataría eventualmente en su libro.[21]

Este es un breve recuento de algunos de los temas más importantes en el trasfondo de los acontecimientos que antecedieron a la publicación del libro de Hilbert en 1899. Antes de esta publicación, todo el trabajo investigativo publicado por Hilbert se concentró en las áreas de los invariantes algebraicos y de los cuerpos de números algebraicos. Sus colegas en Göttingen llegaron hasta a sorprenderse de lo que ellos veían como una incursión de Hilbert en un campo totalmente inexplorado por él con anterioridad.[22] Sin embargo, si bien es cierto que Hilbert no publicó con anterioridad en este campo, tenía ya varios años enseñándolo, y las notas de sus cursos presentan evidencias muy interesantes de cómo sus enfoques sobre los fundamentos se fueron consolidando paulatinamente, pero siempre desde una perspectiva claramente empiricista, donde se presenta a la geometría como una ciencia natural, y no como un mero juego formal. Un ejemplo claro de esto se ve en el siguiente párrafo tomado del curso que él enseñó en 1891:

> La geometría es la ciencia que trata de las propiedades del espa-

[15] Torretti 1978, 221.
[16] Kennedy 1981, 443.
[17] Kennedy 1981a.
[18] Torretti 1978, 225-226.
[19] Veronese 1891.
[20] Toepell 1986, 56.
[21] Schur 1909, iv-vi.
[22] Blumenthal 1935, 402

> cio. Ella es esencialmente diferente de los dominios puros de la matemática tales como la teoría de los números, el álgebra o la teoría de las funciones. Los resultados de éstas ultimas se obtienen a través del pensamiento puro ... La situación es completamente diferente en el caso de la geometría. Yo nunca podré penetrar las propiedades del espacio por pura reflexión, tal y como no podré hacerlo en lo referente a las leyes de la mecánica o cualquier otra ley física de esta manera. El espacio no es un producto de mis reflexiones. Antes bien, me es dado a través de los sentidos.[23]

En 1894 Hilbert dictó otro curso donde ya se hace notar una clara inclinación hacia la presentación axiomática como la más adecuada para un claro entendimiento de la estructura lógica de esta ciencia. Por las notas de su curso sabemos que entre los libros que lo influenciaron en esta dirección se encuentran no sólo textos geométricos, como el de Pasch, y como la traducción alemana del libro de Peano sobre geometría, sino también textos de física, y en particular el muy influyente texto de Heinrich Hertz (1857-1894) sobre los fundamentos de la mecánica.[24]

El aspecto axiomático enfoca principalmente el problema de la independencia que Hilbert describe como sigue:

> Cuáles son las condiciones necesarias, suficientes, y mutuamente independientes que deben postularse para un sistema de cosas para que cada una de sus propiedades corresponda a un hecho geométrico, y, inversamente, para que una descripción y un arreglo completos de todos los hechos geométricos sean posibles basado en este sistema de cosas.[25]

En este contexto, Hilbert siempre remarcaba que no hay razón para limitar este mismo tipo de análisis a la geometría únicamente. Por el contrario, el mismo debería ser muy útil en todas las otras ciencias empíricas. Lo que hace que la geometría sea tan adecuada para ser analizada axiomáticamente es el estado de desarrollo tan avanzado en que se encuentra, más que cualquier otro rasgo esencial de ella. En todos los otros aspectos, no hay ninguna diferencia entre la geometría y las ciencias naturales:

> Entre las apariencias o hechos de la experiencia que se nos manifiestan al observar la naturaleza, hay un tipo peculiar, es decir, aquellos hechos que corresponden a la forma externa de las cosas. La geometría se ocupa de este tipo de hechos. ... La geometría es una ciencia cuyos factores esenciales están a tal punto desarrollados,

[23] El texto es citado en Toepell 1986, 21.
[24] Hertz 1956. Véase también Corry 1997, 8.
[25] Citado en Toepell 1986, 58-59.

> que todos sus hechos pueden ya ser deducidos de otros más básicos. El caso de la electricidad o el de la óptica son muy diferentes, pues muchos nuevos hechos están siendo continuamente descubiertos en ellas. Sin embargo, en lo que respecta a su origen, la geometría es una ciencia natural.[26]

Es el proceso mismo de la axiomatización el que transforma la ciencia natural de la geometría, con su contenido empírico factual, en una ciencia matemática pura. Hilbert no veía alguna razón aparente por qué un proceso similar no podría aplicarse a las otras ciencias naturales. Y de hecho, en el manuscrito del mismo curso leemos que "todas las otras ciencias—sobre todo la mecánica, pero subsecuentemente también la óptica, la teoría de la electricidad, etc.—deberían ser tratadas de acuerdo con el modelo utilizada para la geometría."[27]

Otro aspecto interesante de este punto de vista empiricista se manifiesta en los cometarios de Hilbert sobre el axioma de las paralelas. Hilbert se refirió aquí al conocido experimento de Gauss, quien midió los ángulos entre tres altos picos en Hannover para determinar, por medio de su suma, cuál es el tipo de geometría que realmente describe nuestro espacio. Aunque los resultados de ese experimento convencieron a Gauss a decidirse a favor de la geometría euclídea,[28] Hilbert señaló que en teoría existía la posibilidad de que algún futuro experimento pudiera convencernos de lo contrario.

Hilbert volvió a discutir los fundamentos de la geometría en un curso de 1899. Las ideas que desarrolló al preparar este curso fueron las que a fin de cuentas proporcionaron el contenido de su famoso libro de ese mismo año. El espíritu empiricista que hemos mencionado arriba se refleja una vez más en este curso, y en ese sentido es pertinente traer una cita más que ayuda a entender lo lejos que estaba Hilbert de ser un formalista al emprender su gran trabajo en geometría. Así dijo él en su curso:

> Como la mecánica, la geometría también emerge de la observación, de la experiencia. En este sentido ella es una *ciencia experimental* ... Pero sus fundamentos experimentales han sido tan irrefutablemente, y tan *generalmente reconocidos*– ellos han sido confirmados a tal grado, que ya no se considera necesario dar pruebas adicionales de ellos. Es más, todo lo que se necesita es derivar estos fundamentos de una colección mínima de *axiomas independientes* y así construir el edificio todo de la geometría por *medios puramente lógicos*. De esta manera [es decir por medios puramente lógicos], la geometría se vuelve una ciencia *matemática pura*. También en mecánica se da el

[26]Citado en Toepell 1986, 58.

[27]Citado en Toepell 1986, 94.

[28]Sobre el significado de las observaciones de Gauss hay diferentes interpretaciones. Véanse Breitenberger 1984; Miller 1972; Scholz 1993, 642-644.

> caso de que los físicos han reconocido sus *hechos más básicos*. Pero la *organización* de los conceptos básicos todavía está sujeta a cambios en su percepción ... y por ende la mecánica no puede ser descrita todavía hoy en día como una disciplina *matemática pura*, o por lo menos en el mismo sentido en que podemos decirlo de la geometría. Debemos aspirar a que la mecánica llegue a serlo. Debemos estirar los límites de la matemática lo más ampliamente posible, para el bien, no sólo de nuestros intereses matemáticos, sino en el interés de la ciencia en general.[29]

"*Los Fundamentos de la Geometría*" apareció en 1899.[30] Hilbert presentaba axiomas formulados para tres sistemas de objetos indefinidos: Puntos, líneas, planos. Los axiomas definen interrelaciones que estos objetos deben satisfacer. Hilbert los agrupó en tres grupos: incidencia, orden, congruencia, paralelas y continuidad. Los grupos no tienen ningún significado lógico de por sí. Antes bien, ellos reflejan la concepción de Hilbert de los axiomas como expresiones de nuestra intuición especial y las diferentes formas en que ésta se presenta. Cabe señalar aquí el término "intuición" que aparece tanto en el libro de Hilbert como en la gran mayoría de los textos contemporáneos, se refiere de una manera u otra, al concepto kantiano "*Anschauung*" que fue interpretado en formas diversas y sutilmente diferentes a lo largo de los años. Obviamente no podremos entrar aquí en una discusión completa de esta complejo tema.

La primera demanda que hace Hilbert de estos axiomas es que sean independientes, demanda que ya hemos visto mencionada en sus cursos. Hilbert desarrolló aquí el conocido método de describir modelos que satisfacen un cierto número de axiomas, pero no los otros, como forma de establecer esta independencia. Pero lo que a Hilbert le interesa es el aspecto geométrico de esta independencia. Su libro no es un estudio abstracto de las relaciones lógicas entre los axiomas. Ya vimos la importancia conferida al estudio de las suposiciones de continuidad en el siglo diecinueve. Es esto lo que interesa directamente a Hilbert: cuáles de los teoremas fundamentales de la geometría proyectiva se derivan de cuáles, y cuáles son independientes. De hecho, desde un punto de vista estrictamente lógico, los axiomas de Hilbert no representaban el sistema más económico que cabe imaginarse. Varios matemáticos notaron inmediatamente que el sistema de Hilbert contenía algunas redundancias,[31] pero esto es verdad si los axiomas se consideran como una colección completa y no como colecciones de grupos. A Hilbert lo que le interesaba aquí era la independencia mutua entre los grupos, no entre axiomas individuales de diferentes grupos.

Relacionada con la anterior es la segunda demanda que Hilbert requiere de los axiomas: simplicidad. Esta es una propiedad que no se estableció como parte

[29] Citado en Corry 1997, 108-109 (Enfásis en el original).
[30] Este es le tema desarrollado en detalle en Toepell 1986.
[31] Schur 1901. Véanse Corry 1996, § 3.5; Torretti 1978, 239 ff.

del desarrollo del análisis axiomático en los años que siguieron, y en realidad Hilbert mismo nunca la definió con claridad. Ella se deriva directamente de las concepciones expuestas por Hertz para el tratamiento axiomático de las teorías físicas. Lo que se requiere, esencialmente, es que un axioma contenga "no más de una sola idea". Hilbert menciona este requerimiento en la introducción a su libro, pero más adelante no busca implementarlo explícitamente. Sin embargo, de alguna manera está presente implícitamente como un *desideratum* estético para cualquier sistema axiomático.

Otro requerimiento que Hilbert tomó de Hertz es el de la "completitud". Una axiomatización adecuada para Hilbert es aquella que permita derivar todos los teoremas o resultados conocidos de la disciplina en cuestión. Los axiomas que presentó en su libro permitirían, según su concepción declarada, derivar desde su base, todos los teoremas conocidos de la geometría euclídea así como los de las no-euclídeas, dependiendo de que sistema de axiomas se escogiese. Hilbert discutió en detalle el rol de cada uno de los grupos de axiomas en las demostraciones de los resultados cruciales que motivaron su investigación, siguiendo la línea de los investigadores arriba mencionados: el teorema de Desargues y el de Pappus. En particular esto le permitió clarificar las premisas necesarias para la coordinatización de la geometría proyectiva, tarea que ya muchos habían emprendido antes de él.

Pero una vez más debe enfatizarse aquí: lo que se busca es el sistema adecuado para cada una de las teorías conocidas y suficientemente elaboradas, y no al contrario. No se trata de escoger un sistema más o menos arbitrario de premisas y de ver a dónde ellas nos conducen.

Si bien Hilbert desarrolló un método claro para determinar la independencia en su sistema de axiomas, nunca hizo lo mismo ni para la simplicidad ni para la completitud aquí mencionadas. Es importante, claro está, no confundir el concepto de completitud aquí descrito, con el concepto conocido de la teoría de los modelos, que fue desarrollado muchos años después y que a estas alturas es totalmente ajeno a las concepciones axiomáticas de Hilbert. Se trata aquí de un concepto "pragmático" de la completitud del sistema: ¿sirve o no sirve para describir la teoría toda? En el caso de la geometría euclídea Hilbert estaba convencido de que bastaba mostrar que la geometría sintética podía derivarse de sus axiomas y podía traducirse a la geometría analítica tradicional (tomando a los reales como ejes).

La consistencia del sistema es otro de los puntos de interés de Hilbert en su libro. Es notable, sin embargo, que ello no es mencionado en la introducción al libro. Inmediatamente después de definir los varios grupos de axiomas y discutir sus consecuencias inmediatas, Hilbert mencionó el tema muy brevemente. Desde el punto de vista del desarrollo posterior de la metamatemática como la conocemos hoy en día, la pregunta de la consistencia se transformó en una de las centrales, y por ende, muchas veces ella es vista como si hubiese sido también la de mayor importancia en la presentación axiomática de la geometría por Hilbert ya en 1899. Sin embargo, en el contexto histórico preciso de este libro, esto no era de ninguna manera el caso. De hecho, Hilbert no le dedica más de dos páginas en el libro, y el texto no deja ver muy claramente cual era la motivación de Hilbert al presentar este punto precisamente ahí donde lo hace. Es bastante improbable que Hilbert pensara en 1899 que los teoremas de la geometría euclídea pudieran llevar a una contradicción ni que sea necesario probar esto, en especial, dada la concepción de Hilbert de la geometría como una ciencia natural que describe el espacio físico. Antes bien, Hilbert parecía estar siguiendo una idea expresada por Hertz en su *Mecánica*, según la cual, las teorías físicas, al irse desarrollando, van agregando hipótesis que parecen razonables de por sí, pero que finalmente pueden llegar a contradecir otras hipótesis que se han asumido con anterioridad. El análisis axiomático de la mecánica que Hertz había realizado, se destinaba a aclarar una posible situación como esta en esa disciplina, y esta era una idea que Hilbert quiso adoptar tanto para la geometría como para las otras ciencias empíricas. Dado el reciente auge de la geometría no-euclídea sería tal vez conveniente clarificar si en la geometría no se habían adoptado recientemente algunas suposiciones adicionales que podrían estar contradiciendo el ya aceptado cuerpo de conocimiento de esta disciplina.

Estos son entonces los requerimientos que Hilbert establece para su sistema de axiomas de la geometría: completitud, consistencia, independencia, y simplicidad. En principio, no hay ninguna razón por la cual un análisis como el aplicado por él a su sistema para la geometría pueda también aplicarse similarmente a cualquier sistema de postulados que establecen relaciones entre elementos indefinidos, incluyendo postulados abstractos, arbitrariamente escogidos, y carentes de algún significado intuitivo directo. Pero el hecho es que Hilbert nunca actuó de esta manera. Su concepción no incluía este tipo de análisis ni estimulaba el hacerlo. Todo su trabajo de esta época en el área de la axiomatización se refería a sistemas que definían teorías elaboradas y bien establecidas: no sólo la geometría sino también la mecánica y otras áreas de la física.

Más aun: en los años inmediatamente posteriores a la publicación del libro de Hilbert, encontramos un gran número de trabajos matemáticos, especialmente en los Estados Unidos, en los cuales se realizan análisis de sistemas de postulados abstractos, para conceptos algebraicos tales como grupos, cuerpos, álgebras booleanas, etc., basados en la aplicación de los conceptos y las técnicas introducidas por Hilbert.[32] No existe ninguna evidencia que Hilbert mostró interés alguno en estos trabajos, y de hecho existen muchas razones para pensar que Hilbert nunca contempló que su propio trabajó implicaría esta dirección de investigación.[33]

En el siglo que empezaba "*Los Fundamentos de la Geometría*" de Hilbert

[32]Por ejemplo Moore 1902a, Huntington 1902.
[33]Véase Corry 1996, § 3.5.

tendrían una enorme influencia, directa e indirecta en muchos campos de investigación, en la enseñanza de la matemática y en la forma en que los textos se irían escribiendo. Iría mucho más allá del espacio aquí disponible analizar todas las reacciones y proyecciones inmediatas al trabajo de Hilbert. Sin embargo, lo dicho acá debería bastar para indicar cuán lejos estaba Hilbert, sobre todo en esta etapa relativamente temprana de su carrera de ser el formalista que muchas veces se ha presentado. Es propicio concluir con un párrafo tomado de un curso dictado en 1905, sobre la axiomatización de la física, y en donde vemos claramente la esencia de su concepción del análisis axiomático como un medio para asegurar la solidez de las teorías existentes, y no como un medio para introducir de manera artificial, teorías basadas en el desarrollo formal de sistemas abstractos de postulados faltos de significado intuitivo. Así los describe el propio Hilbert:

> El edificio de la ciencia no se construye como una vivienda, en la cual hay que establecer primeramente unas fundaciones firmes para poder después proceder a levantar y a ensanchar las habitaciones. La ciencia prefiere hacerse lo antes posible de confortables espacios por donde pasearse con holgura y es solamente después, cuando los primeros signos aparecen por aquí y por allá, que las inestables fundaciones no son capaces de sostener la expansión de los dormitorios, que ella se dispone a repuntarlos y fortificarlos. Esto no es un signo de debilidad, sino más bien la vía correcta para su buen desarrollo.[34]

Bibliografía

BLUMENTHAL, O. 1935 "Lebensgeschichte", in Hilbert *Gesammelte Abhandlungen A*, Vol. 3, 387-429.

BREITENBERG, E. 1984 "Gauss's Geodesy and the Axiom of Parallels", *Arch. Hist. Ex. Sci.* 31, 273-289.

CONTRO, W. 1976 "Von Pasch bis Hilbert", *Arch. Hist. Ex. Sci.* 15, 283-295.

CORRY, L. 1996 *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Boston, Birkhäuser.

1997 "David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1894-1905)", *Archive for History of Exact Sciences* 51: 83-198.

1998 "The Origins of Eternal Truth in Modern Mathematics: Hilbert to Bourbaki and Beyond", *Science in Context* 12: 137-183.

[34] Citado en Corry 1997 .

DIEUDONNÉ, J. 1962 "Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques", in F. Le Lionnais (ed.) *Les grands Courants de la Pensèe Mathématique* (Second, enlarged edition), Paris, Blanchard, 443-555.

1970 "The Work of Nicolas Bourbaki", *Am. Math. Monthly* 77, 134-145.

FERREIRÓS, J. 1999 *Labyrinths of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*, Boston, Birkhäuser.

HERTZ, H. 1956 *The Principles of Mechanics Presented in a New Form*, New York, Dover.

HILBERT, D. 1899 *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, Teubner.

1926 "On the Infinite", in J. van Heijenoort (ed.) *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931, Cambridge, Harvard University Press (1967), pp. 367-392.

1992 *Natur und Mathematisches Erkennen: Vorlesungen, gehalten 1919-1920 in Göttingen.* (Edited and with an English introduction by David E. Rowe), Basel, Birkhäuser.

HUNTINGTON, E.V. 1902 "Simplified Definition of a Group", *Bull. AMS* 8, 296-300.

KENNEDY, H. 1980 *Peano - Life and Work of Giuseppe Peano*, Dordrecht, Reidel.

KLEIN, F. 1871 "Über die sogennante Nicht-Euklidische Geometrie", *Math. Ann.* 4, 573-625.

1873 "Über die sogennante Nicht-Euklidische Geometrie", *Math. Ann.* 6, 112-145.

1926-7 *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, 2 Vols., ed. by R. Courant and O. Neugebauer, Berlin, Springer. (Chelsea reprint, New York, 1948.)

MANCOSU, P. (ED.) 1998 *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, New York, Oxford University Press.

MILLER, A.I. 1972 "On the Myth of Gauss's Experiment on the Physical Nature of Space", *Isis* 63, 345-348.

MOORE, E.H. 1902 "Projective Axioms of Geometry", *Trans. AMS* 3, 142-158.

ROWE, D.E. 1994 "The Philosophical Views of Klein and Hilbert", in Sasaki et al. (eds.) *The Intersection of History and Mathematics*, Basel/Berlin/-Boston, Birkhäuser, 187-202.

SCHUR, F. 1901 "Über die Grundlagen der Geometrie", *Math. Ann.* 55, 265-292.

1909 *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, Teubner.

SCHOLZ, E. 1993 "Gauss und die Begründung der 'Höhere' Geodäsie" in M. Folkerts et al. (eds.) *Amphora - Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65 Geburtstag*, Berlin, Birkhäuser, 631-648.

SEGRE, M. 1994 "Peano's Axioms in their Historical Context", *Arch. Hist. Ex. Sci.* 48, 201-342.

TOEPELL, M. M. 1986 *Über die Entstehung von David Hilberts "Grundlagen der Geometrie"*, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.

TORRETTI, R. 1978 *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht, Reidel.

TYMOCZKO, T (ED.). 1985 *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Boston, Birkhäuser.

VAN DALEN, D. 1990 "The war of the frogs and the mice, or the crisis of Mathematische Annalen', *Mathematical Intelligencer*, 12, no. 4, 17-31.

VERONESE, G. 1891 *Fondamenti di geometria a piu dimensioni e a piu specie di unitá rettilinee, esposti in forma elementare*, Padova, Tipografia del Seminario.

LEO CORRY
COHN INSTITUTE FOR HISTORY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE AND IDEAS
TEL AVIV UNIVERSITY, RAMAT AVIV 67798
ISRAEL
corry@post.tau.ac.il
http://spinoza.tau.ac.il/hci/ins/cohn/corry/homepage.htm