27/06/2023

הפקולטה למדעי הרוח
ע״ש לסטר וסאלי אנטין
אוניברסיטת תל אביב

הספר שהשני של האלמנטים של אוקלידס

גרסה עברית מלאה, בתוספת הערות והסברים

0659-2626 תולדות המתמטיקה מיוון העתיקה ועד ניוטון

מרצה - פרופ' ליאו קורי

נכתב ע"י אייל אלפסי

הקדמה

הספר השני של יסודות הוא השני מתוך שלושה עשר חלקים של הספר 'יסודות' (או האלמנטים), המיוחס למתמטיקאי ההלניסטי אוקלידס מאלכסנדריה, מראשית המאה השלישית לפנה"ס. כחלק מארבעת הספרים הראשוניים, חלק זה עוסק בגאומטריה של המישור, ובאופן פרטני בנושא של השוואת שטחים. הספר קצר ביחס לספרים האחרים ומכיל רק 2 הגדרות ו-14 טענות. ספר זה, ביחד עם ספרים אחדים אחרים של "יסודות", היווה חלק חשוב בוויכוח בין היסטוריונים של המתמטיקה באשר לנוכחות של רעיונות אלגבריים בחיבור של אוקלידס ובמתמטיקה היוונית בכלל, במיוחד לאור כך שהוא ספר גאומטרי העוסק בהשוואת שטחים.

ההגדרות המופיעות בספרו השני:

1. נאמר כי כל מקבילית מלבנית מוכלת על ידי שני הקווים הישרים המכילים את הזווית הישרה.
2. ובכל אזור מקבילי תקרא כל אחת מהמקביליות בקוטר שלו עם שני המשלימים: 'גנומון' (מילה יוונית שפירושה 'משבצת הנגר', כלי בצורת L).

פרשנויות למשמעות הספר

הספר עצמו לא מכיל תוצאות חדשות (בניגוד לספרים העיקריים של ארכימדס ואפולוניוס) וככל הנראה אוקלידס עצמו לא הוכיח את הטענות המופיעות בספר, אך ערכו היה בכך שהוא לקח את הדברים הנראים לו יסודיים ביותר, כמעיין ארגז כלים שאותו כל מתמטיקאי יווני יצטרך בהמשך הדרך, והוא היה מיוחד בכך שאיגד בתוכו בצורה שיטתית וכרונולוגית (מבחינת הוכחות) את הבסיס של המתמטיקה היוונית (ומכאן למעשה שמו: "יסודות"). במשך מאות שנים, בגלל התשתית והמבוא שהוא סיפק, הפך ספרו של אוקלידס לנכס צאן ברזל של המדע, ושל המתמטיקה בפרט, עד למאה ה-18. הוא אף היווה חומר חובה עבור הסטודנטים באוניברסיטאות אירופה בימי הביניים עבור נושאי האריתמטיקה והגאומטריה. אך עם התפתחות האלגברה בקרב מתמטיקאים ערבים החל מהמאה ה-8 ובקרב מתמטיקאים אירופאיים בימי הביניים המאוחרים והרנסאנס, חלקים ממנו החלו להיות משוכתבים תוך צירוף שיח ורעיונות אלגבריים.
באמצע המאה ה-19 היסטוריונים שחקרו את תולדות האלמנטים והציגו מהדורות ביקרויותיות והיסטורגפיות לקחו את הדבר הזה, והציגו את זה כאילו זאת הייתה כוונתם המקורית של היוונים, כלומר החלה להתפתח נקודת מבט לפיה המתמטיקה היוונית העתיקה היא למעשה "אלגברה בתחפושת גאומטרית".

אלגברה גאומטרית

אלגברה גאומטרית היא תפיסה היסטוריוגרפית לפיה המתמטיקה היוונית הקדומה, המנוסחת מוגדרת ומוכחת ברובה המוחלט באופן גאומטרי, היא למעשה אלגברה, שמסיבות מסוימות, לובשת "תחפושת" גאומטרית. מכאן, אם רוצים להסתכל על המתמטיקה של היוונים העתיקים בצורה היסטורית, זה נכון ואף רצוי להסתכל עליה בכלים אלגבריים מודרניים, כי "היא אלגברית במהותה". לפי קו מחשבה זה אין סכנה של פירוש מוטעה בהמרת הטיעונים לשפת האלגברה ובשימוש בסימון מודרני. כך למשל, את הטענות שבספר השני של יסודות ניתן לפרש בצורה הבאה:

משפט 1 - $a(b+c+\cdots)=ab+ac+\cdots$

משפט 2- $a=b+c\rightarrow a^2=ab+ac$

משפט 5 - $ab+\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)-b\right)^2=\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2$

היסטוריונים שפיתחו או קידמו רעיון זה במיוחד היו: גאורג נסלמן, תומאס הית', פול טנרי, הירונימוס גאורג צויטן . ישנם גם היסטוריונים שייחסו רעיון זה בנוסף אל מתמטיקה עתיקה של עמים אחרים כגון הבבלים והמצרים כגון: אוטו נויגבאואר, ובארטל לנדרט ון דר וארדן. גישה זאת הוסיפה לפופולריות של "יסודות", שכעת היווה לא רק את הבסיס הקדום של המתמטיקה, אלא הכיל אף טענות אלגבריות מודרניות ומתקדמות שהיו "חבויות" מתחת למעטה של גאומטריה ואריתמטיקה עתיקה. רעיון זה של האלגברה הגאומטרית נהפך למוסכם כללית בתחום חקר ההיסטוריה של המתמטיקה בחצי השני של המאה ה-19, והיה מאוד פופולרי בקרב רוב מייסדי האלגברה המודרנית (וייט, דקארט, פרמה) ונשאר ככזה למשך יותר מ-100 שנה.

ביקורת

למרות שהפרשנות בסגנון של האלגברה הגאומטרית הייתה הגישה ההיסטוריוגרפית השלטת כמאה שנה, החל מהרבע האחרון של המאה העשרים החלו כמה מתמטיקאים והיסטוריונים להעלות התנגדות לפרשנות זאת בטענה שהיא מטעה, אנכרוניסטית ושגויה. ראוי לציון במיוחד מאמרו פורץ הדרך (ומעורר המחלוקת אז) של שבתאי אונגורו ב-1975 שקרא לשכתב מחדש את ההיסטוריה של המתמטיקה היוונית במה שהוא מכנה "על בסיס היסטורי שפוי".

אונגורו טוען שאין שום בסיס היסטורי מספק לגישת האלגברה הגאומטרית המקובלת, ושהיא המצאה דמיונית של מתמטיקאים מודרניים שקוראים טקסטים קדומים דרך משקפיים מודרניות. הוא תוקף אותה בנימוקים הבאים:

מן האלגברה הגאומטרית נגרס שההוכחות המודרניות הן בדיוק מה שהיה למתמטיקאים העתיקים כשהם כתבו את שכתבו.

גישה נכשלת לענות על השאלה הברורה ביותר: אם המתמטיקאים היוונים חשבו בצורה אלגברית, והנימוקים, ההוכחות והמבנים שלהם הם אלגבריים באופן מהותי (כפי שהתומכים בגישה זאת טוענים), אז למה הם נותרו עם שיטה מסורבלת וקשה כל כך על ידי אמצעים גאומטריים? למה המסגרת האלגברית נותרת מוסתרת אם אין ספק בבסיס האלגברי שעליו מבוססת המתמטיקה היוונית? אפילו מבחינת הסימון עצמו היוונים לא השתמשו באלפבית היווני כדי לסמל מספרים.

יסטורית הרעיון של אלגברה גאומטרית אינו אפשרי, שכן תנאי הכרחי לכך הוא קיום אלגברה כלשהי לפני כן שממנה היוונים יצאו. אך זו מעולם לא הייתה קיימת, שכן לא היית שום אלגברה בעידן הטרום-נוצרי. לכן לא הייתה יכולה להיות שום אלגברה גאומטרית.

המצב כיום

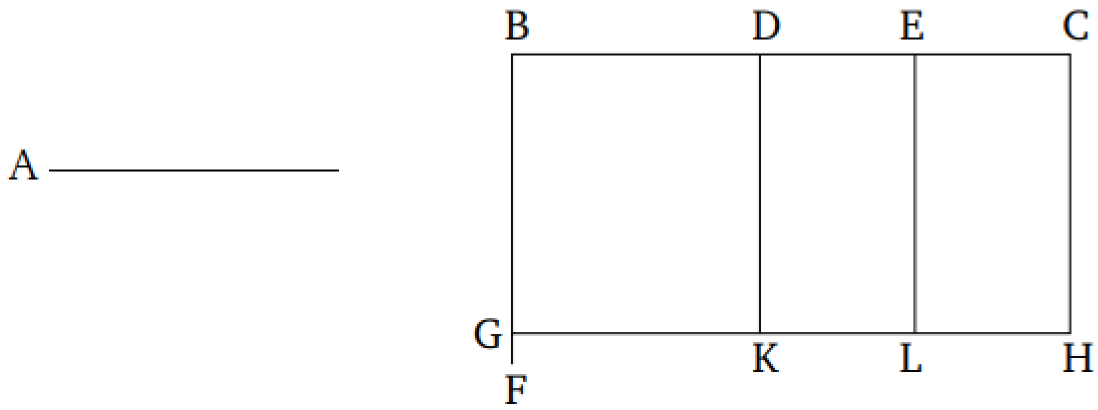
מאמרו השנוי במחלוקת והתקיף של אונגורו לא התקבל בעיין יפה בקרב החוקרים, וזכה לתגובות נגד משמעותיות שלהם אונגרו ענה במאמר נוסף בשנת 1979. אך ברבות הזמן החלו עוד אנשים להמשיך תקוף את רעיון האלגברה הגאומטרית: אונגורו ודוויד רוו ב-1981 ושוב ב-1982, קנור שוב ב-1986, קן סאיטו ב-1986, אייבור גרטן-גינס ב-1996, אונגורו ומיכאל נ. פריד ב-2001. ומלבד זאת, החלו חוקרים לדבר על אנלוגיות בין מתמטיקה יוונית עתיקה, במיוחד זו שבאה לידי ביטוי ביסודות, לבין מתמטיקה מודרנית ללא כפיית גישת באלגברה הגאומטרית.

כיום הפרדיגמה התהפכה: רוב ההיסטוריונים של המתמטיקה דוחים את העמדה של האלגברה הגאומטרית, והיא נחשבת מיעוט לא משמעותי היום. בין האנשים היחידים שעדיין מסנגרים על גישה זאת בולט ויקטור בלאשו שבמאמרו משנת 2015, מנסה להדוף את הביקורות של המאמרים העיקריים שיצאו נגד שיטה זאת. הוא טוען ש"לגאומטריה האלגברית מגיע משפט הוגן", ו"שהגיע הזמן לקחת צעד אחורה ולהפסיק את ההתנגדות השטחית האוטומטית כלפי הגאומטריה האלגברית ולהסתכל עליה במבט חדש עם ראש פתוח".

תוכן עניינים

משפט 1

אם קו ישר נחתך באופן אקראי, המלבן המוכל על ידי השלם ואחד מהקטעים שווה למלבן המוכל על ידי הקטעים והריבוע על הקטע לעיל.



הוכחה:

יהיו A ו BC שני ישרים, ונחתוך את BC באקראי בנקודות D ו-E. נאמר שהמלבן המוכל בA ו- BC שטחיהם שווים למלבנים המוכלים על ידי A ו-BD, ועל ידי A ו- DE ועל ידי A ו-EC.

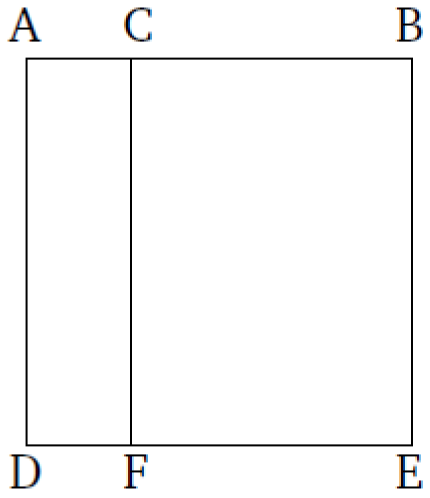
1. נשרטט את BF מנקודה B כך שישר זה מאונך לBC (טענה 1.11).
2. נסמן את הישר BG כך שאורכו שווה ל-A. טענה (1.3)
3. נשרטט את הישר GH דרך נקודה G כך ש $BC \parallel GH$ טענה (1.31).
4. נשרטט את DK, EL, CH דרך הנקודות בהתאמה D, E, C כך ש $BG \parallel DK, EL, CH$ טענה (1.31).
5. שטחו של המלבן BH שווה לשטחו של המלבנים BK, DL, EH.
6. BH זה המלבן המוכל על ידי A ו-BC.
7. BH זה המלבן המוכל על ידי GB ו-BC, שכן GB שווה באורכו A.
8. BK זה המלבן המוכל על ידי A ו-BD.
9. BK זה המלבן המוכל על ידי GB ו-BD, שכן GB שווה באורכו A.
10. DL זה המלבן המוכל על ידי A ו-DE.
11. DL זה המלבן המוכל על ידי GB ו-DE , שכן GB שווה באורכו A.
12. EH זה המלבן המוכל על ידי A ו-EC.
13. לכן המלבן המוכל על ידי A ו-BC שווה למלבן המוכל על ידי A ו-BD, A ו-DE ו-A ו- EC . ולכן שטח המלבן שווה לשטח לסכום שטחי המלבנים המוכלים בו.

במונחים מודרניים משפט זה שקול ל- $a(b + c + \cdots) = ab + ac + \cdots$

טענה 1.3- בהינתן שני ישרים האחד גדול והשני קטן לחתוך מגדול ישר באורך הקטן.
טענה 1.11- לשרטט קו ישר בזווית ישרה מקו ישר לנקודה נתונה.
טענה 1.31- לשרטט ישרים מקבילים לקו ישר, דרך נקודה נתונה.

משפט 2

אם קו ישר נחתך באופן אקראי, המלבן המוכל על ידי השלם ושני הקטעים שווה לריבוע על השלם.



הוכחה:

יהי AB ישר הנחתך באקראי בנקודה C. נאמר שהמלבן המוכל על ידי AB וב-BC ועוד המלבן המוכל על ידי BA ו-AC , שווה לריבוע על AB.

1. נבנה ריבוע על AB ונסמן את קודקודיו ב$ADEB$ (טענה 1.46).
2. נשרטט את הישר CF דרך הנקודה C כך שתקביל לAD או ל BE (טענה 1.31)
3. הריבוע AE שווה למלבן AF וCE.
4. הריבוע AE שווה לריבוע על AB.
5. AF זה המלבן המוכל על ידי הישרים BA ו-AC, ומלבן זה מוכל ב-DA ו-AC, ו-AD שווה ל-AB.
6. CE זה מלבן המוכל על ידי AB ו-BC.
7. BE שווה ל AB ולכן המלבן המוכל על ידי BA ו-AC, ועוד המלבן המוכל על ידי AB ו-BC, ששווה לריבוע על AB.

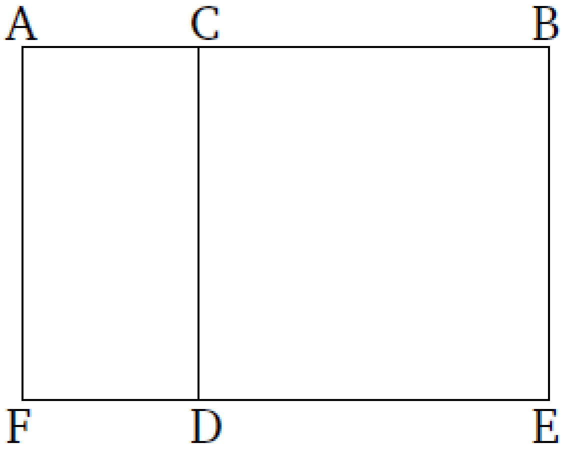
במונחים מודרניים משפט זה שקול ל- $a = b + c \rightarrow a^2 = ab + ac$

טענה 1.31- לשרטט ישרים מקבילים לקו ישר, דרך נקודה נתונה.

טענה 1.46-- לבנות ריבוע מישר נתון.

משפט 3

אם קו ישר נחתך באופן אקראי, המלבן המוכל על ידי השלם ואחד מהקטעים שווה למלבן המוכל על ידי הקטעים והריבוע על הקטע לעיל.



הוכחה:

יהי AB ישר הנחתך בנקודה אקראית C, ונראה שהמלבן המוכל על ידי AB ו-BC שווה למלבן המוכל על ידי AC ו-CB ועוד הריבוע BC.

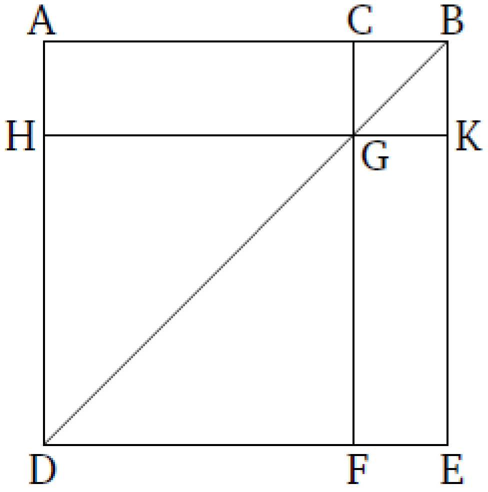
1. נסמן $CDEB$ הריבוע שנבנה על CB (טענה 1.46).
2. נשרטט את ED דרך F, ונשרטט את AF דרך A כך שהישר יהיה מקביל לCD או ל-BE. (טענה 1.31).
3. המלבן AE שווה למלבן AD ועוד המלבן CE.
4. AE זה המלבן המוכל על ידי AB ו- BC ומלבן זה מוכל על ידי AB ו-BE.
5. מכך ש AE זה המלבן המוכל על ידי AB ו-BE, ומכך ש BE שווה ל-BC. ומכן ש- AD זה המלבן המוכל על ידי AC ו-CB כמו כן , DC שווה ל CB. וDB זה הריבוע שנבנה על CB. המלבן המוכל על ידי AB וBC שווה למלבן המוכל על ידיד AC ו CB ועוד הריבוע שנבנה על BC .

במונחים מודרניים משפט זה שקול ל - $(a+b)a = ab + a^2$

טענה 1.31- לשרטט ישרים מקבילים לקו ישר, דרך נקודה נתונה.
טענה 1.46-- לבנות ריבוע מישר נתון.

משפט 4

אם קו ישר נחתך באופן אקראי, הריבוע של השלם שווה לריבועים על הקטעים ופעמיים המלבן המוכל על ידי הקטעים.



הוכחה:

יהי AB ישר הנחתך בנקודה אקראית C. ונראה שהריבוע שנבנה על AB שווה לריבוע הנבנה על AC ועוד הריבוע שנבנה על CB ועוד פעמיים הריבוע המוכל על ידי AC ו-CB.

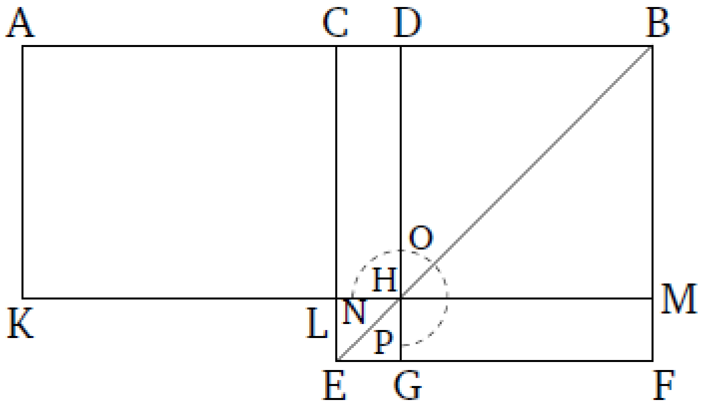
1. נשרטט את הריבוע $ADEB$ על הישר AB (טענה 1.46).
2. נשרטט את האלכסון BD.
3. נשרטט את הישר CF העובר דרך נקודה C, המקביל ל-AD או ל-EB (טענה 1.31).
4. $AD \parallel CF$ ולכן $\measuredangle CGB = \measuredangle ADB$ (טענה 1.29)
5. $\measuredangle ADB = \measuredangle ABD$ מכיוון ש-$AB = BD$ (טענה 1.5)
6. $\measuredangle CGB = \measuredangle GBC$ ולכן $BC = CG$ (טענה 1.6)
7. $CB = GK$ וגם $CG = KB$ (טענה 1.34) ולכן $GK = KB$ ולכן $CGKB$ מרובע שווה צלעות.
8. $BK \parallel CG$ לכן $\measuredangle KBC = \measuredangle GCB$ שוות שתיהן לזוויות ישרות. (טענה 1.29). ולכן גם הזוויות הנגדיות שוות הן זוויות ישרות. (טענה 1.34) ולכן המרובע $CGKB$ הוא ריבוע ומאותם שיקולים גם HF זה ריבוע.
9. משיקולי סימטריה המלבן AG חופף למלבן GE. (טענה 1.43)
10. המלבן AG מוכל על ידי AC ו-CB ולכן גם המלבן GE מוכל על ידי AC ו-CB.
11. לכן HF, CK, AG, GE שווים לסכום הריבועים של AC ו-BC .
12. מכך ש $AG = GE$ אז HF, CK, AG, AG שווים לסכום הריבועים של AC ו-BC .

במונחים מודרניים משפט זה שקול ל - $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

טענה 1.5- זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שוות.
טענה 1.6- לזוויות שוות במשולש מתאימים צלעות שוות בהתאמה.
טענה 1.29- קו ישר החותך שני ישרים מקבילים יוצר זוויות שוות לסירוגין, הזווית החיצונית שווה לזווית הפנימית והנגדית, וסכום הזוויות הפנימיות ל-$180°$.
טענה 1.31- לשרטט ישרים מקבילים לקו ישר, דרך נקודה נתונה.
טענה 1.34- בצורה מקבילית צלעות וזוויות נגדיות שוות זו לזו, והאלכסון חוצה את הזוויות.
טענה 1.43- בכל מקבילית, המשלימים של המקבילית שווים זה לזה ביחס לאלכסון.
טענה 1.46- לבנות ריבוע מישר נתון.

משפט 5

אם קו ישר נחתך לקטעים שווים ולא שווים, המלבן המוכל על ידי הקטעים הלא שווים של השלם עם הריבוע על הקו הישר בין הנקודות של החתך שווה לריבוע על חצי.



הוכחה:

יהי AB נתון הנחצה בנקודה C נתונה, ונחתך לשני קטעים לא שווים בנקודה D.

נראה שהמלבן המוכל על ידי AD ו-DB ביחד עם הריבוע על CD שווה לריבוע על CB.

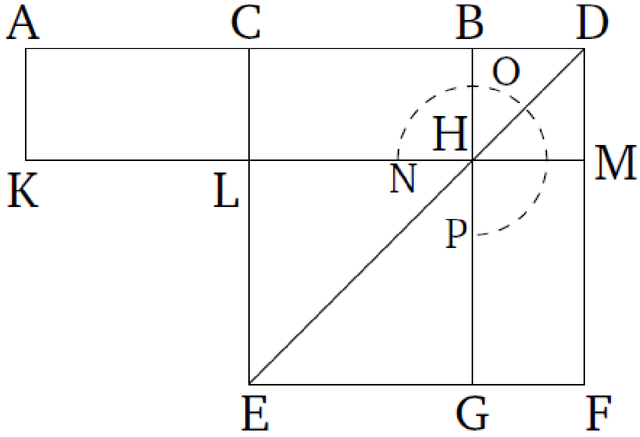
1. יהי $CEFB$ הריבוע המתואר על CB ונצייר את BE (טענה 1.46)
2. דרך D נשרטט את DG במקביל לCE או לBF, ודרך H ונשרטט עוד ישר KM במקביל לAB או לBM (טענה 1.31)
3. כעת, המלבן CH שווה למלבן HF (טענה 1.43)
4. מכאן, CM שווה לDF, אך CM שווה לAL כי AC גם הוא שווה ל BC (טענה 1.36) לכן AL גם שווה לDF.
5. נוסיף את CH לכל אחד מהם [כל אחד מהמלבנים המוזכרים] ואז AH יהיה שווה לגנומון NOP. אך AH הוא המלבן AD, DB כי DH שווה לDB. לכן הגנומון NOP שווה גם למלבן AD, DB.
6. נוסיף את LG, השווה לריבוע על CD, לכל אחד מהם.
7. מכאן, הגנומון NOP וLG שווים למלבן המוכל על ידי AD, DB והריבוע על CD.
8. אך הגנומון NOP וLG הם הריבוע $CEFB$ המתואר על CB.
9. לכן המלבן המוכל על ידי AD, DB יחד עם הריבוע על CD שווה לריבוע על CB.

במונחים מודרניים משפט זה שקול ל - $ab+\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)-b\right)^2=\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2$

טענה 1.31- לשרטט ישרים מקבילים לקו ישר, דרך נקודה נתונה.
טענה 1.43- בכל מקבילית, המשלימים של המקבילית שווים זה לזה ביחס לאלכסון.
טענה 1.46- לבנות ריבוע מישר נתון.

משפט 6

אם קו ישר נחצה ומוסיפים לו קו ישר, המלבן המוכל על ידי השלם עם הישר הנוסף והקו הישר הנוסף עם הריבוע על החצי שווים לריבוע על הקו הישר שהוא החצי והקו הישר שהוסף.



הוכחה:

יהי AB ישר הנחצה בנקודה C, נמשיך את הישר על ידי BD ונראה שהמלבן המכול על ידי AD ו-DB ועוד הריבוע שנבנה על CB שווה לריבוע CD.

1. נשרטט את הריבוע $CEFD$ הנבנה על CD (טענה 1.46).
2. נשרטט את האלכסון DE ונשרטט את הישר BG דרך הנקודה B כך ש $EC \parallel BG$ או$DF \parallel BG$. (טענה 1.31)
3. נשרטט את הישר KM דרך הנקודה H כך ש $AB \parallel KM$ או $EF \parallel KM$. (טענה 1.31)
4. נשרטט את הישר AK דרך הנקודה A כך ש $CL \parallel AK$ או $AK \parallel DM$. (טענה 1.31)
5. מכך ש $AC = CB$ נסיק ש AL חופף ל CH (טענה 1.36) כמו כן, CH חופף ל HF ולכן מטרנזיטיביות החפיפה HF חופף ל AL.
6. נוסיף את המלבן CM לשני הצדדים. ונקבל ש AM שווה לגנומון NOP.
7. המלבן AM מוכל במלבן הנבנה בAD ו— DB ו-DM שווה ל-DB.
8. לכן הגנומון NOP שווה ל AD ו-DB .
9. נסתכל על LG שזה הריבוע על BC, נוסיף אותו לשני הצדדים, ולכן המלבן המוכל על ידי AD ו-DB, ועוד הריבוע CB שווה לגנומון NOP והריבוע LG.
10. הגנומון NOP והריבוע LG זהה לכל הריבוע $CEFD$ הנבנה על CD.
11. לכן המלבן המוכל על ידי AD ו-DB ועוד הריבוע CB שווה לריבוע CD .

כנדרש.

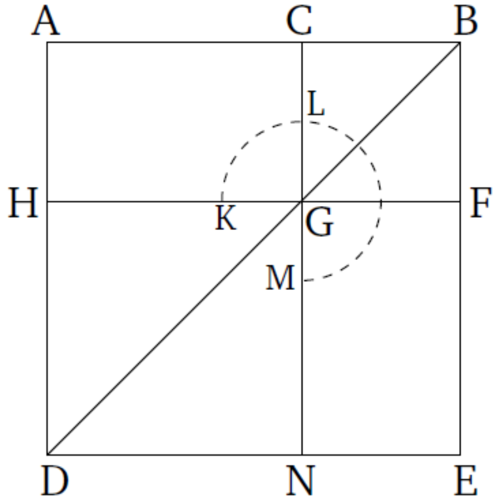
במונחים מודרניים משפט זה שקול ל - $(2a+b)b + a^2 = (a+b)^2$

טענה 1.31- לשרטט ישרים מקבילים לקו ישר, דרך נקודה נתונה.

טענה 1.46- לבנות ריבוע מישר נתון.

משפט 7

אם קו ישר נחתך באופן אקראי, הריבוע על השלם וזה שעל אחד מהקטעים שניהם יחדיו שווים לפעמיים המלבן המוכל על ידי השלם והקטע הנאמר והריבוע שעל הקטע הנותר.



הוכחה:

יהי AB קו ישר הנחתך בנקודה C. ונראה שסכום הריבועים של AB וBC שווה לפעמיים המלבן המוכל על ידי AB וBC והריבוע על CA.

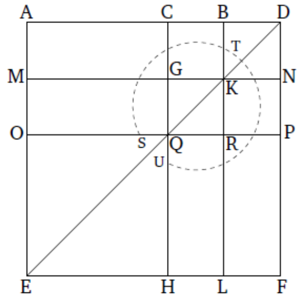
1. נשרטט את הריבוע $ADEB$ הנבנה על AB (טענה 1.46) ונשרטט את שאר הקונפיגורציה.
2. AG חופף לGE (טענה 1.43) ונוסיף את AF לשני הצדדים.
3. המלבן AF חופף למלבן CE.
4. המלבן AF ועוד המלבן CE זה פעמיים המלבן AF.
5. המלבן AF ועוד המלבן CE זה הגנומון KLM , והריבוע CF הוא פעמיים AF. אבל פעמיים AF הוא גם פעמיים המלבן על ידי AB וBC.
6. BF שווה לBC ולכן הגנומון KLM והריבוע CF שווים לפעמים המלבן המוכל על ידי AB וBC.
7. נתבונן ב DG שהוא הריבוע על AC, נוסיף אותו לשני הצדדים. ולכן הגנמון KLM והריבוע BG וGD, שווים לפעמיים המלבן המוכל על ידי AB ו-BC, והריבוע על AC אבל הגנמון KLM והריבוע BG וGD שקולים לכל $ADEB$ וCF והם הריבועים על AB ו BC בהתאמה.
8. ולכן סכום הריבועים על AB וBC שווים לפעמיים המלבן המוכל על AB וBC והריבוע על AC.

במונחים מודרניים משפט זה שקול ל - $(a+b)^2+a^2=2(a+b)a+b^2$

טענה 1.3- בהינתן שני ישרים האחד גדול והשני קטן לחתוך מגדול ישר באורך הקטן.
טענה 1.34--בצורה מקבילית צלעות וזוויות נגדיות שוות זו לזו, והאלכסון חוצה את הזוויות.
טענה 1.36- מקביליות בעלות בסיסים שווים חופפות זו לזו.
טענה 1.43-- בכל מקבילית, המשלימים של המקבילית שווים זה לזה ביחס לאלכסון.
טענה 1.46- לבנות ריבוע מישר נתון.

משפט 8

אם קו ישר נחתך באופן אקראי, ארבע פעמים המלבן המוכל על ידי השלם ואחד מהקטעים יחדיו עם הריבוע על הקטע הנותר שווה לריבוע המתואר על השלם והקטע לעיל כעל קו ישר אחד.



הוכחה:

יהי AB ישר הנחתך בנקודה אקראית C, ונראה שארבע פעמים המלבן המוכל על ידי AB ו-BC ועוד הריבוע AC שווה לריבוע המתואר על צלע מאורך $AC + BC$.

1.יהי BD המשכה של AB כך ש, $AB = CB$ (טענה 1.3).

2. נשרטט את הריבוע $AEFD$ על AD (טענה 1.46) ואת שאר הקונפיגורציה נשרטט פעמיים.

3. מכך ש $CB = BD$ ו$CB = GK$ (טענה 1.34) וגם מתקיים ש $BD = KN$ (טענה 1.34), אז מטרנזיטיביות השיוון נסיק $GK = KN$ ומאותם שיקולים נסיק ש $QR = RP$.

4.מכך ש $BC = BD$ וגם $GK = KN$ הריבוע CK חופף לריבוע KD והריבוע GR חופף לריבוע RN (טענה 1.36) ולכן CK חופף ל-RN כי הם משלימים של מקבילית CP. (טענה 1.43).

5.הריבוע KD חופף לריבוע GR, ולכן ארבעת הריבועים DK, CK, GR, RN חופפים זה לזה ולכן הם שווים ל4 פעמים CK.

6.מכך ש $CB = BD = BK = CG = GK = GQ = QR = RP$ נוכל להסיק ש AG חופף ל-MQ ומלבן QL חופף לRF הם משלימים של מקביליתML ולכן שווים (טענה 1.43).

7.AG חופף לRF לכן ארבעת המלבנים AG, MQ, QL, RF חופפים זה לזה ולכן הם שקולים ל4 פעמים AG.

8. שמונת המרובעים $AG, MQ, QL, RF, CK, KD, GR, RN$ יוצרים את הגנומון STU.

9. שמונת הצורות המרכיבות את הגנומון הם ארבע פעמים הצורה AK.

10. הגנומון STU שווה למלבן המוכל על ידי 4 פעמים AB וBD.

11. יהי OH שווה לריבוע על AC נוסיף אותו לשני הצדדים. ולכן ארבע פעמים המלבן המוכל על ידי AB ו-BD ועוד הרביעו על AC, שווה לגנומון STU ולריבוע OH.

12.הגנומון STU והריבוע OH שקולים לכל הריבוע $AEFD$.

13.לכן ארבע פעמים המלבן המוכל על ידי AB ו-BD ועוד הריבוע AC, שווה לריבוע על AD.

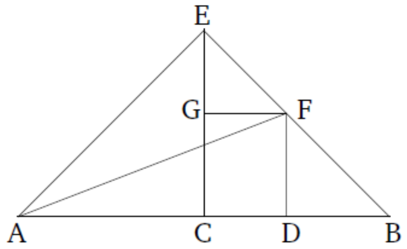
14. $BD = BC$ ולכן 4 פעמים המלבן המוכל על ידי AB ו-BC, ועוד הריבוע על AC שווה לריבוע על AD.

במונחים מודרניים משפט זה שקול ל - $4(a+b)a + b^2 = \left((a+b)+a\right)^2$

טענה 1.3- בהינתן שני ישרים האחד גדול והשני קטן לחתוך מגדול ישר באורך הקטן.
טענה 1.34--בצורה מקבילית צלעות וזוויות נגדיות שוות זו לזו, והאלכסון חוצה את הזוויות.
טענה 1.36- מקביליות בעלות בסיסים שווים חופפות זו לזו.
טענה 1.43-- בכל מקבילית, המשלימים של המקבילית שווים זה לזה ביחס לאלכסון.
טענה 1.46- לבנות ריבוע מישר נתון.

משפט 9

אם קו ישר נחתך לקטעים שווים ולא שווים, הריבועים על הקטעים הלא שווים של השלם הם כפולים מהריבוע על החצי והריבוע על הקטע בין החתכים.



הוכחה:

לכל ישר AB הנחצה בנקודה C, ונחתך בנקודה D לשני חלקים לא שווים. נראה שסכום של הריבוע שנבנה על AD ועוד סכום הריבוע שנבנה על DB הוא פעמים סכום הריבועים הנבנים על AC ו DC.

1.נוריד אנך מE לC כך ש $EC \perp AB$. (טענה 1.11) כך ש $AC = CB$ (טענה 1.3) ונחבר את EA, EB.

2.נשרטט את DF דרך נקודה D שתקביל ל-EC (טענה 1.31) ונשרטט את FG דרך נקודה F שתקביל ל-AB (טענה 1.31).

3.נחבר את AF.

4.$AC = CE$ לכן $\measuredangle EAC = \measuredangle AEC$ (טענה 1.5).

5. $\measuredangle EAC + \measuredangle AEC = 90°$ שכן מכיוון ש זווית C היא ישרה סכום שאר הזוויות הוא של זווית ישרה. (טענה 1.32)

6. הזוויות $\measuredangle CEA = \measuredangle CAE = 45^\circ$ ומאותם טיעונים $\measuredangle CEB = \measuredangle CBE = 45^\circ$ ולכן $\measuredangle AEB = 90^\circ$.

7. $\measuredangle GEF = 45^\circ$ כמו כן, $\measuredangle EGF = 90^\circ$ (טענה 1.29).

8.$\measuredangle EFG = 45^\circ$ לפי טענה (1.32) ולכן $\measuredangle GEF = \measuredangle EFG$ ולכן $EG = GF$ (טענה 1.6)

9.מכיוון ש $\measuredangle B = 45^\circ$ ו$\measuredangle FDB = 90^\circ$ אז $\measuredangle ECB = 90^\circ$ (טענה 1.32).

10. $\measuredangle DFB = 45^\circ = \measuredangle B$ ולכן מתקיים $FD = DB$ (טענה 1.6).

11 . מכך ש $AC = CE$ אז מתקיים שהריבוע שנבנה על AC שווה לריבוע שנבנה על CE. ולכן סכום הריבועים AC, CE הוא פעמיים הריבוע AC. והריבוע EA שווה לסכום הריבועים AC, CE.

הפסטולט החמישי -- אם ישר חותך שני ישרים אחרים אז הזוויות הפנימיות מאותו צד קטנות או שוות לשתי זוויות ישרות, ואם נמשיך את הישירים לנצח הם יפגשו בצד של הזוויות שסכומן קטן משתי זוויות ישרות.

טענה 1.5 – זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שוות.
טענה 1.6 - לזוויות שוות במשולש מתאימים צלעות שוות בהתאמה.
טענה 1.11- לשרטט קו ישר בזווית ישרה מקו ישר לנקודה נתונה.
טענה 1.15- ישרים החותכים זה את זה יוצרים זוויות נגדיות שוות זו לזו.
טענה 1.29- קו ישר החותך שני ישרים מקבילים יוצר זוויות שוות לסירוגין, הזווית החיצונית שווה לזווית הפנימית והנגדית, וסכום הזוויות הפנימיות ל-°180.
טענה 1.31- לשרטט ישרים מקבילים לקו ישר, דרך נקודה נתונה.
טענה 1.34-בצורה מקבילית צלעות וזוויות נגדיות שוות זו לזו, והאלכסון חוצה את הזוויות.
טענה 1.47-משפט פיתגורס.

12. $\measuredangle ACE = 90^\circ$ (טענה 1.47) ולכן הריבוע שנבנה על EA הוא פעמיים הריבוע שנבנה על AC. ומכך ש $EG = GF$ נסיק שהריבוע שנבנה על EG שווה לריבוע שנבנה על GF. ולכן סכום הריבועים EF, GF הוא פעמיים הריבוע הנבנה על GF. והריבוע EF שווה לריבוע על EG וGF (טענה 1.47).

13. EF הוא פעמיים הריבוע שנבנה על GF. ו$GF = CD$ (טענה 1.34).

14. הריבוע הנבנה על EF הוא פעמיים הריבוע שנבנה על CD. והריבוע על EA הוא גם פעמיים הריבוע על AC.

15. סכום הריבועים של AE ו-EF הוא פעמיים סכום הריבועים של AC, CD.

16. הריבוע שנבנה על AF שווה לסכום הריבועים על AE, EF.

17. $\measuredangle AEF = 90^\circ$ (טענה 1.47)

18. הריבוע AF הוא פעמיים סכום הריבועים על AC, CD.

19. סכום הריבועים על AD, DF שווה לריבוע שנבנה על AF.

20. $\measuredangle D = 90^\circ$ (טענה 1.47) ולכן סכום הריבועים על AD, DF הוא פעמיים סכום הריבועים על AC, CD.

21. $DF = DB$ ולכן סכום הריבועים על AD, DB שווה לפעמיים סכום הריבועים על AC, CD.

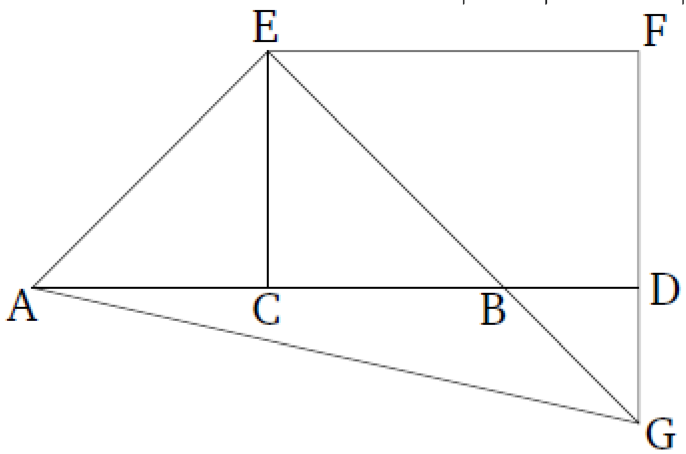
במונחים מודרניים משפט זה שקול ל - $a^2 + b^2 = 2\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2\right)$

הפסטולט החמישי -- אם ישר חותך שני ישרים אחרים אז הזוויות הפנימיות מאותו צד קטנות או שוות לשתי זוויות ישרות, ואם נמשיך את הישירים לנצח הם יפגשו בצד של הזוויות שסכומן קטן משתי זוויות ישרות.

טענה 1.5 – זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שוות.
טענה 1.6 - לזוויות שוות במשולש מתאימים צלעות שוות בהתאמה.
טענה 1.11- לשרטט קו ישר בזווית ישרה מקו ישר לנקודה נתונה.
טענה 1.15- ישרים החותכים זה את זה יוצרים זוויות נגדיות שוות זו לזו.
טענה 1.29- קו ישר החותך שני ישרים מקבילים יוצר זוויות שוות לסירוגין, הזווית החיצונית שווה לזווית הפנימית והנגדית, וסכום הזוויות הפנימיות ל-180°.
טענה 1.31- לשרטט ישרים מקבילים לקו ישר, דרך נקודה נתונה.
טענה 1.34-בצורה מקבילית צלעות וזוויות נגדיות שוות זו לזו, והאלכסון חוצה את הזוויות.
טענה 1.47-משפט פיתגורס.

משפט 10

אם קו ישר נחצה, ומוסיפים לו קו ישר, הריבוע על השלם עם הקו הישר הנוסף והריבוע על הקו הישר הנוסף שניהם יחדיו מהווים כפול מהריבוע על החצי ושל הריבוע המתואר על הקו הישר המורכב מחצי ומהקו הישר הנוסף כעל קו ישר אחד.



הוכחה:

יהי AB ישר הנחצה בנקודה C, נמשיך את ישר זה על ידי ישר BD. נראה שסכום הריבועים על AB, DB הוא פעמיים סכום הריבועים על AC, CD.

1. נשרטט את CE מנקודה C, כך ש $CE \perp AB$ (טענה 1.11) כך ש $AC = CB = EC$ (טענה 1.3) ונחבר את EA ואת EB.
2. נשרטט את EF דרך נקודה E, כך ש $ED \parallel AD$ (טענה 1.31).
3. נשרטט את FD דרך נקודה D, כך ש $CE \parallel FD$ (טענה 1.31).
4. $\measuredangle CEF = \measuredangle EFD = 90°$ (טענה 1.29).
5. $\measuredangle FEB + \measuredangle EFB < 180°$ ולכן נסיק שהישרים היוצאים מנקודה B, D נחתכים (הפוסטולט החמישי)
6. נסמן את נקודת החיתוך של EB, FD ב-G, ונחבר את הישר AG.
7. $AC = CE$ וגם $\measuredangle EAC = \measuredangle AEC$ (טענה 1.5) והזווית בקודקוד C יוצר זווית ישרה ולכן $\measuredangle EAC = \measuredangle AEC = 45°$. (טענה 1.32) ומאותם טיעונים $\measuredangle CEB = \measuredangle EBC = 45°$ ולכן $\measuredangle AEB = 90°$.
8. מכך ש $\measuredangle EBC = 45°$ אז נסיק ש $\measuredangle DBG = 45°$ (טענה 1.15)
9. ו-$\measuredangle BDG = 90° = \measuredangle DCE$ כי הם זוויות מתחלפות. (טענה 1.29).
10. $\measuredangle DGB = 45°$ ולכן $\measuredangle DGB = \measuredangle DBG$ ולכן $BD = GD$ (טענה 1.6).
11. $\measuredangle EGF = 45°$ ומכך שהזווית ב-F הינה זווית ישרה אז היא שווה לזווית הנגדית לה ב-C (טענה 1.34) ולכן $\measuredangle FEG = 45°$ ולכן $\measuredangle EGF = \measuredangle FEG$.
12. הצלע $GF = EF$ (טענה 1.6).
13. כעת מכיוון ש $EC = CA$ הריבוע שנבנה על EC שווה לריבוע שנבנה על CA.
   a. ולכן סכום הריבועים על EC, CA שווה לפעמיים סכום הריבוע על CA. והריבוע על EA שווה לסכום הריבועים של EC ו-CA (טענה 1.47).
14. הריבוע על EA הוא פעמיים הריבוע על AC.
15. $FG = EF$ ולכן הריבוע על FG שווה לריבוע על FE.
16. סכום הריבועים על GF ו-FE הוא פעמיים הריבוע שנבנה על EF.
17. הריבוע על EG שווה לסכום הריבועים על GF ו-FE (טענה 1.47).
18. הריבוע על EG הוא פעמיים הריבוע על EF ושווה ל-CD (טענה 1.34)

טענה 1.5- זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שוות.
טענה 1.6-- לזוויות שוות במשולש מתאימים צלעות שוות בהתאמה.
טענה 1.10- בהינתן שני ישרים האחד גדול והשני קטן לחתוך מגדול ישר באורך הקטן.
טענה 1.11- לחצות קו ישר.
טענה 1.15- ישרים החותכים זה את זה יוצרים זוויות נגדיות שוות זו לזו.
טענה 1.29- קו ישר החותך שני ישרים מקבילים יוצר זוויות שוות לסירוגין, הזווית החיצונית שווה לזווית הפנימית והנגדית, וסכום הזוויות הפנימיות ל-180°.
טענה 1.31- לשרטט ישרים מקבילים לקו ישר, דרך נקודה נתונה.
טענה 1.32-- במשולש הזווית החיצונית שווה לסכום הזוויות הפנימיות המנוגדת לה.
טענה 1.46- לבנות ריבוע מישר נתון.
טענה 1.47-משפט פיתגורס.

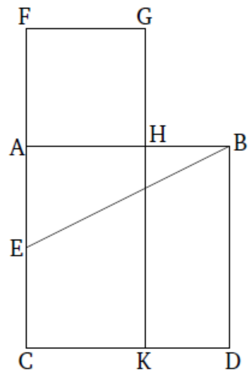
19. הריבוע EG הוא פעמיים הריבוע על CD.
20. הריבוע על EA הוא פעמיים הריבוע על AC.
21. סכום הריבועים על AE, EG הוא פעמיים סכום הריבועים של AC, CD.
22. הריבוע על AG שווה לסכום הריבועים על AE ו-EG (טענה 1.47).
23. הריבוע על AG הוא פעמיים סכום הריבועים על AC ו-CD.
24. סכום הריבועים על AD ו-DG שווה לריבוע שנבנה על AG (טענה 1.47).
25. סכום הריבועים על AD ו-DG הוא פעמיים סכום הריבועים על AC ו-CD.
26. $DG = DB$ ולכן סכום הריבועים על AD ו-DB הוא פעמיים סכום הריבועים על AC ו-CD.

במונחים מודרניים משפט זה שקול ל -$(2a+b)^2 + b^2 = 2(a^2 + (a+b)^2)$

טענה 1.5- זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שוות.
טענה 1.6-- לזוויות שוות במשולש מתאימים צלעות שוות בהתאמה.
טענה 1.10- בהינתן שני ישרים האחד גדול והשני קטן לחתוך מגדול ישר באורך הקטן.
טענה 1.11- לחצות קו ישר.
טענה 1.15- ישרים החותכים זה את זה יוצרים זוויות נגדיות שוות זו לזו.
טענה 1.29- קו ישר החותך שני ישרים מקבילים יוצר זוויות שוות לסירוגין, הזווית החיצונית שווה לזווית הפנימית והנגדית, וסכום הזוויות הפנימיות ל-$180°$.
טענה 1.31- לשרטט ישרים מקבילים לקו ישר, דרך נקודה נתונה.
טענה 1.32-- במשולש הזווית החיצונית שווה לסכום הזוויות הפנימיות המנוגדת לה.
טענה 1.46- לבנות ריבוע מישר נתון.
טענה 1.47-משפט פיתגורס.

משפט 11

לחתוך קו ישר נתון כך שהמלבן המוכל על-ידי הקו השלם ואחד הקטעים שווה לריבוע על הקטע הנותר.



הוכחה:

יהי AB קו ישר. ונחתוך את AB כך ש המלבן המוכל על ידי כל הקו הישר, וכל אחד מחלקיו, שווה לריבוע על הקטע הנותר.

1.נשרטט את הריבוע $ABDC$ על AB (טענה 1.46), ונחצה את הישר AC בנקודה E (טענה 1.10), נחברת את הנקודות BE.

2. נמשיך את הישר CA עד לנקודה F, כך ש $EF = BE$ (טענה 1.3).

3.נבנה את הריבוע FH על גבי הצלע AF. (טענה 1.46), ונמשיך את GH עד לנקודה K.

4. כעת נטען שהמלבן המוכל על ידי AB ו-BH שווה לריבוע על AH.

5.הישר AC נחצב לשתיים בנקודה E, ו-FA הוסף לו, המלבן המוכל על ידי CF ו-FA ועוד הריבוע שנבנה על AE, שווה לריבוע שנבנה על EF (טענה 2.6).

6.$EF = EB$.

7. המלבן המוכל על ידי CF ו-FA, ועוד הריבוע על AE, שווה לריבוע על EB.

8. סכום הריבועים על BA ו-AE שווה לריבוע על EB.

9. הזווית A הינה זווית ישרה (טענה 1.47).

10. המלבן המוכל על ידי CF ו-FA ועוד הריבוע על AE, שווה לסכום הריבועים על BA ו-AE. נחסיר את הריבוע AE משני האגפים.

11. המלבן המוכל על ידי CF ו-FA שווה לריבוע על AB.

12. FK זה המלבן המוכל על ידי CF ו-FA.

13. $AF = FG$.

14. AD זה הריבוע על AB.

15. המלבן FK שווה לריבוע AD.

16. נחסיר את המלבן AK משני האגפים ולכן הריבוע FH שווה למלבן HD.

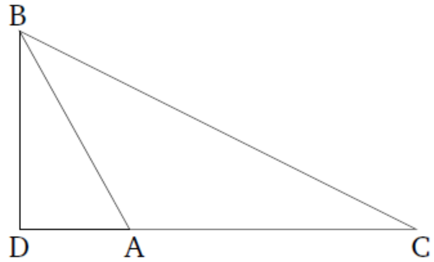
17. HD הוא המלבן המוכל על ידי AB ו-BH.

18. AB שווה ל-BD. ו- FH זה הריבוע על AH ולכן המלבן המוכל על ידי AB ו-BH שווים לריבוע על H .

טענה 1.3- בהינתן שני ישרים האחד גדול והשני קטן לחתוך מגדול ישר באורך הקטן.
טענה 1.10- לחצות קו ישר.
טענה 1.46- לבנות ריבוע מישר נתון.
טענה 1.47-משפט פיתגורס.

משפט 12

במשולשים קהיי זווית הריבוע על הצד שממול לזווית הקהה גדול יותר מסכום הריבועים על הצדדים המכילים את הזווית הקהה בפעמיים המלבן המוכל על ידי אחד מהצדדים על הזווית הקהה, כלומר זאת שעליה האנך נופל, והקו הישר הנחתך מבחוץ על ידי האנך לכיוון הזווית הקהה.



הוכחה:

יהי ABC משולש קהה זווית, עם זווית קהה $\measuredangle BAC$. נשרטט את BD מנקודה B שיהיה מאונך לCA (טענה 1.12). ונראה שהריבוע שנבנה על BC גדול מסכום הריבועים BA ו-AC, על ידי פעמיים המלבן המוכל ב-CA ו-AD.

1.הריבוע שנבנה על DC שווה לסכום הריבועים על CA ו-AD, ופעמיים המלבן המוכל על ידי CA ו-AD (טענה 2.4) ונוסיף את הריבוע שנבנה על ידי DB לשני האגפים.

2.סכום הריבועים על CD ו-DB שווה לסכום הריבועים על CA, AD, DB ופעמים המלבן המוכל על ידי CA ו-AD.

3.הריבוע שנבנה על CB שווה לסכום הריבועים CD ו-DB.

4. הזווית D היא ישרה (טענה 1.47).

5. הריבוע שנבנה על AB שווה לסכום הריבועים על AD ו-DB (טענה 1.47).

6.הריבוע שנבנה על CB שווה לסכום הריבועים על CA ו-AB, ופעמים המלבן המוכל ב-CA ו-AD.

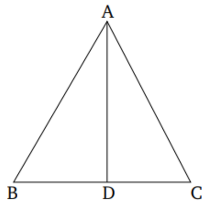
ולכן הריבוע שנבנה על CB גדול יותר מסכום הריבועים על CA ו-AB על ידי פעמיים המלבן שמוכל ב-CA ו-AD.

במונחים מודרניים משפט זה שקול למשפט הקוסינוסים - $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB * AC * \cos(\measuredangle BAC)$ מכיוון ש $\cos(\measuredangle BAC) = -\frac{AD}{AB}$

טענה 1.12- להוריד אנך מנקודה לישר נתון.
טענה 1.47-משפט פיתגורס.

משפט 13

במשולשים חדי זווית הריבוע על הצד שממול לזווית החדה קטן יותר מסכום הריבועים על הצדדים המכילים את הזווית החדה בפעמיים המלבן המוכל על ידי אחד מהצדדים של הזווית החדה, כלומר זאת שעליה האנך נופל, והקו הישר הנחתך מבפנים על ידי האנך לכיוון הזווית החדה.



ובשפה מודרנית:

משפט: יהי ABC משולש כך ש $\measuredangle ABC < 90^{\circ}$ ונוריד את האנך AD.

ונראה ש $AC^2 < AB^2 + BC^2$.

הוכחה:

יהי ABC משולש חד זווית, כך שהזווית B היא חדה. ונוריד אנך מקודקוד A, כך ש $AD \perp BC$ (טענה 1.12). נראה שהריבוע שנבנה על AC הוא קטן מסכום הריבועיים CB, BD, על ידי פעמיים המלבן המוכל על ידי CB ו-BD.

1.נחתוך את הישר CB באקראי בנקודה D , סכום הריבועים על CB ו-BD שווה לפעמים המלבן המוכל על ידי CB ו-DC, והריבוע DC (טענה 2.7). ונוסיף את הריבוע שנבנה על DA לשני האגפים.

2.סכום הריבועים CB, BD, DA שווים לפעמים המלבן המוכל על ידי CB ו-BD, וסכום הריבועים על AD ו-DC.

3.הריבוע שנבנה על AB שווה לסכום הריבועים על BD ו-DA.

4. הזווית D זו זווית ישרה (טענה 1.47).

5.הריבוע שנבנה על AC שווה לסכום הריבועים על AD ו-DC (טענה 1.47).

6.סכום הריבועים על CB ו-BA שווה לריבוע שנבנה על AC, ופעמיים המלבן המוכל על ידי CB ו-BD.

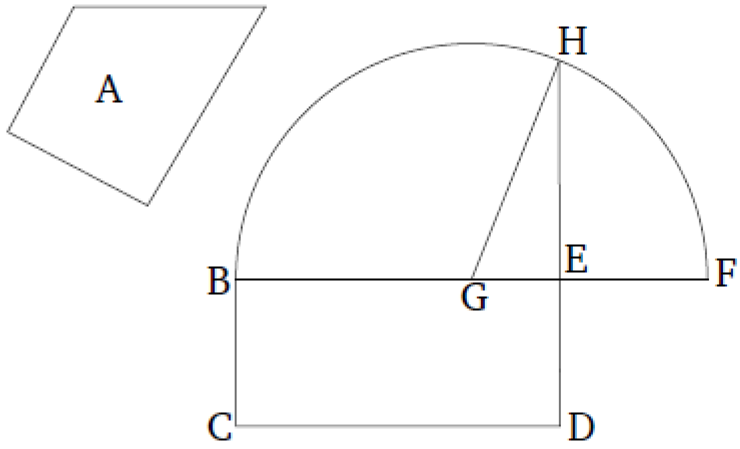
ולכן הריבוע שנבנה על AC בלבד הוא קטן מסכום הריבועים על CB ו-BA על ידי פעמיים המלבן המוכל על ידי CB ו-BD.

במונחים מודרניים משפט זה שקול למשפט הקוסינוסים - $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB * BC * \cos(\measuredangle ABC)$ מכיוון ש $\cos(\measuredangle ABC) = \frac{BD}{AB}$

טענה 1.3- בהינתן שני ישרים האחד גדול והשני קטן לחתוך מגדול ישר באורך הקטן.

טענה 1.10- לחצות קו ישר.
טענה 1.12- להוריד אנך מנקודה לישר נתון.
טענה 1.45 – לבנות מקבילית ששטחה שווה לצורה מלבנית.
טענה 1.47-משפט פיתגורס.

משפט 14 - לבנות ריבוע ששטחו שווה לצורה מלבנית נתונה.



הוכחה:

תהי A צורה מלבנית. ונבנה ריבוע שווה לשטחה של הצורה המלבנית A.

1.נבנה מקבילית BD, ששטחה שווה לצורה הריבועית A (טענה 1.45).

2. אם $BE = ED$ אז סיימנו כלומר BD זה ריבוע.

3. אם $BE \neq ED$ אז $BE > ED$ או $ED > BE$ נניח ללא הגבלת הכלליות ש $BE > ED$

ונמשיך את BE עד לנקודה F, כך ש$EF = ED$ (טענה 1.3).

4.נחצה את BF ונקרא לנקודה זו G (טענה 1.10).

5.G מרכז מעגל עם רדיוס GB או GF, ונשרטט את מעגל BHF.

6.נמשיך את הישר DE, לנקודה H, ונחבר את GH.

7.כעת מכיוון ש BF נחצה באופן שווה בנקודה G, ובאופן לא שווה בנקודה E אז המלבן המוכל על ידי BE ו-EF, ועוד הריבוע על EG, שווה לריבוע על GF (טענה 2.5) ו- $GF = GH$.

8.המלבן המוכל על ידי BE ו-EF ועוד הריבוע שנבנה על GE, שווה לריבוע שנבנה על GH.

9. סכום הריבועים HE ו-EG שווה לריבוע שנבנה על GH (טענה 1.47).

10. המלבן המוכל על ידי BE ו-EF, ועוד הריבוע שנבנה על GE, שווה לסכום הריבועים על HE ו-EG. נחסיר את הריבוע שנבנה על GE משני האגפים. ולכן המלבן שנותר המוכל ב-BE ו-EF שווה לריבוע שנבנה על EH.

11. BD זה המלבן המוכל על ידי BE ו-EF.

12.$EF = ED$ ולכן המקבילית BD שווה לריבוע שנבנה על HE.

13. BD שווה בשטחו לצורה המלבנית A.

14. ולכן הצורה המלבנית שווה בשטחה לריבוע שנבנה על EH.

כנדרש.

טענה 1.3- בהינתן שני ישרים האחד גדול והשני קטן לחתוך מגדול ישר באורך הקטן.

טענה 1.10- לחצות קו ישר.

טענה 1.12- להוריד אנך מנקודה לישר נתון.

טענה 1.45 – לבנות מקבילית ששטחה שווה לצורה מלבנית.

טענה 1.47-משפט פיתגורס.